DIE DIRAC δ-DISTRIBUTION: EINE ALTERNATIVE DEFINITION

RICHARD KUENG[1,2]

[1]Institute for Physics, University of Freiburg, Rheinstraße 10, 79104 Freiburg, Germany
[2]Freiburg Center for Data Analysis Modeling, Eckerstr. 1, 79104 Freiburg, Germany

Abstract. Ziel dieses Textes ist es, die Dirac'sche δ-Funktion von einem alternativen Blickwinkel herzuleiten. Diese Herleitung benutzt das Konzept von Funktionalen und ist mathematisch gesehen "sauberer" als andere Definitionen der δ-Distribution.

1. Funktionale

Als Grundlage unserer Herleitung benötigen wir das Konzept "schnell fallender" Funktionien.

Definition 1 (*Raum der schnell fallenden Funktionen*)**.** Wir bezeichnen mit $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ den Raum der "schnell fallenden" Funktionen $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dieser Raum besteht aus allen analytischen ($\mathbb{C}^\infty$) Funktionen, welche

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^a \phi(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \pm\infty} x^a \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \phi(x) = 0$$

für $a \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}_+$ beliebig erfüllen. Zudem sind alle "schnell fallenden" Funktionen – und deren Ableitungen – beschränkt, i.e.

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi(x)| < \infty \quad \text{und} \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \phi(x) \right| < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

Salopp gesprochen besteht $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ aus allen beschränkten Funktionen deren Ableitungen schnell genug (i.e. schneller als x^{-a} für $a \in \mathbb{N}$ beliebig) gegen 0 streben.

Für derartige Funktionen $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ lässt sich ein Skalarprodukt folgendermaßen definieren:

$$\langle \phi, \psi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\psi(x)\mathrm{d}x.$$

Mithilfe dieses Skalarproduktes lassen sich fast alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die ihr kennt neu interpretieren – nämlich als *Funktionale* auf $\mathbb{S}(\mathbb{R})$. Anschaulich gesprochen ist ein Funktional eine mathematische Operation, welche eine Funktion "frisst" und eine Zahl "ausspuckt". In diesem Sinne sind Funktionale Verallgemeinerungen von Funktionen (Funktionen "fressen" Zahlen und spucken "Zahlen" aus). In der Tat, für eine beliebige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist

$$F_f[\phi] := \langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

ein Funktional auf dem Raum der schnell abfallenden Funktionen $\mathbb{S}(\mathbb{R})$. Man beachte, dass wir hier nicht verlangen, dass f selbst in $\mathbb{S}(\mathbb{R})$ liegt.

Bemerkung 2. Nicht jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erlaubt eine derartige Interpretation. Ein offensichtliches Gegenbeispiel ist die Exponentialfunktion $f(x) = \mathrm{e}^x$, für welche der Ausdruck (1) nicht wohldefiniert ist (e^x wächst schneller, als die schnell-fallenden Funktionen abfallen. Konsequenterweise explodiert der Intregrand für $x \to \infty$.

Der große Vorteil von der Funktionalinterpretation (1) von Funktionen liegt darin, dass Funktionale viel robuster sind, als die ursprünglichen Funktionen. Inbesondere lassen sich mit dem Funktionalkonzept nicht-stetige Funktionen mathematisch rigoros ableiten. Das ist im Rahmen der Standardanalysis nicht möglich. Diese neue Möglichkeiten wollen wir hier ausloten. Dafür brauchen wir allerdings ein letztes Konzept – das der *Äquivalenz*. Wir bezeichnen zwei

Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als äquivalent[1], falls deren Funktionale für alle schnell-fallenden Funktionen identisch sind, i.e.

$$f \simeq g \leftrightarrow F_f[\phi] = \langle f, \phi \rangle = \langle g, \phi \rangle = F_g[\phi] \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{2}$$

Funktionen, welche eine Funktionalinterpretation dieser Art besitzen, werden auch als *Distributionen* bezeichnet.

2. Beispiel: die ersten zwei Ableitungen der Betragsfunktion $|x|$ (als Funktional)

Um die Robustheit des Funktionalkonzeptes zu erläutern wollen wir nun etwas tun, was in der Standardanalysis streng verboten ist: wir werden die Betragsfunktion $|x|$ (welche in null nicht stetig differenzierbar ist) zweimal ableiten.

Für die erste Ableitung definieren wir formal $f := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|x|$ und berechnen $F_f[\phi]$ für $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ beliebig:

$$\begin{aligned}
F_f[\phi] &= \langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|x|, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|x| \right) \phi(x) \mathrm{d}x \overset{\text{p.I.}}{=} |x|\phi(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} |x| \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi(x) \right) \mathrm{d}x \\
&= 0 + \int_{-\infty}^{0} x\phi'(x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{\infty} x\phi'(x)\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{p.I.}}{=} x\phi(x)|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} \phi(x)\mathrm{d}x - x\phi(x)|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} \phi(x)\mathrm{d}x \\
&= 0 + \int_{-\infty}^{0} (-1)\,\phi(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} (+1)\,\phi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \langle \operatorname{sgn}(x), \phi \rangle.
\end{aligned}$$

Da $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ beliebig war, können wir mithilfe der Äquivalenz (2) folgendes ableiten:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|x| \simeq \operatorname{sgn}(x) \tag{3}$$

Dieses Resultat sollte eure Erwartungen wiedergeben und lässt sich prinzipiell auch noch mit Methoden der Standardanalysis herleiten.

Letzteres ist jedoch nicht mehr der Fall für die zweite Ableitung $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}|x|$ der Betragsfunktion. Wegen (3) reicht es, die erste Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{sgn}(x)$ der Signumsfunktion zu betrachten. Analog zu vorhin definieren wir also $g := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{sgn}(x)$, wählen $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ beliebig und berechnen

$$\begin{aligned}
F_g[\phi] &= \langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{sgn}(x), \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{sgn}(x) \right) \phi(x)\mathrm{d}x \overset{\text{p.I.}}{=} \operatorname{sgn}(x)\phi(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(x)\phi'(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_{-\infty}^{0} (-1)\,\phi'(x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{\infty} (+1)\,\phi'(x)\mathrm{d}x = +\int_{-\infty}^{0} \phi'(x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{\infty} \phi'(x)\mathrm{d}x \\
&= \phi(x)|_{-\infty}^{0} - \phi(x)|_{0}^{\infty} = \phi(0) - 0 - 0 + \phi(0) = 2\phi(0).
\end{aligned}$$

Folglich gilt also $F_g[\phi] = \phi(0)$ für alle $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Dies entspricht aber genau der Aktion der Dirac'schen Deltadistribution (multipliziert mit 2), welche ihr bereits aus der Vorlesung kennt. Konkret:

$$\delta(x) \simeq \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{sgn}(x) \simeq \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}|x|.$$

Bemerkung 3. Man beachte, dass die δ-Distribution KEINE Funktion im eigentlichen Sinn ist. Ohne der Intregralinterpretation (1) macht das Konzept überhaupt keinen Sinn und man sollte daher unbedingt vermeiden, das Dirac-δ als Funktion zu sehen, geschweige denn sie als solche zu bezeichnen. Wie wir soeben gezeigt haben, ist die Delta-Distribution dennoch zusammen mit der Funktionalinterpretation ein wohldefiniertes Objekt und zudem proportional zur zweiten Ableitung der Betragsfunktion.

---

[1] Folgt aus $f \simeq g$, dass die Funktionen f und g tatsächlich identisch sein müssen, oder ist Äquivalenz (2) ein schwächeres Konzept als Gleichheit?