

Erklärungsversuch des Ernst Planimeters

Richard Küng

April 12, 2013

Ich glaube das Ding funktioniert genauso wie der naive Ansatz eines Gymnasialschülers. Stell dir also einen Menschen an der Position des Geräts vor. Der würde dann folgende Flächenapproximation vorschlagen:

1. Ziehe an den beiden Enden der Kurve vertikale Linien vom untern Blattende (x -Achse) bis zur Kurve. Dann ist die Fläche durch zwei Kurven eingerahmt.
2. Der Flächeninhalt besteht dann aus dem Integral der oberen Kurve minus das Integral der unteren Kurve. Dieser Sachverhalt ist in meiner Skizze dargestellt.
3. Zentral ist nun folgende Beobachtung: Da die horizontale Länge aller Rechtecke (c) konstant ist, hängt ihr Flächeninhalt LINEAR von der vertikalen Rechtecklänge ab. Dies gilt für beliebige Abstände c , insbesondere auch im Limes $c \rightarrow 0$ (Riemann-Integral)
4. Für c sehr klein entspricht die vertikale Rechtecklänge (fast) genau dem vertikalen Abstand der oberen Kurve in diesem Punkt. Diese Korrespondenz wird im Grenzfall $c \rightarrow 0$ (Riemann-Integral) exakt.
5. Das Ernst-Planimeter macht nun genau das. Im ersten Schritt tastet er genau den vertikalen Abstand der oberen Kurve von der x -Achse in jedem Punkt ab. Das führt zu einer eindeutigen Position auf dem Kegel des Geräts.
6. Bewegt man nun den Stift ein bisschen nach links, so wird diese Bewegung mechanisch (!!!) auf den Kegel übertragen und dieser sorgt dafür, dass die korrekte Fläche am Zähler angegeben wird.
Nota Bene: Da – wie bereits erwähnt – der Zusammenhang zwischen Fläche und vertikalem Abstand der Kurve LINEAR ist, reicht tatsächlich ein (wohlkalibrierter) Kegel aus um diese Relation mechanisch zu implementieren!
7. Der zweite Schritt funktioniert genauso wie der erste, nur in umgekehrter Richtung. Somit läuft die Maschine rückwärts was mathematisch gesehen einfach einem Minuszeichen entspricht (aufgrund der umgekehrten Bewegung wird der Zeiger zurück- und nicht vorgedreht).

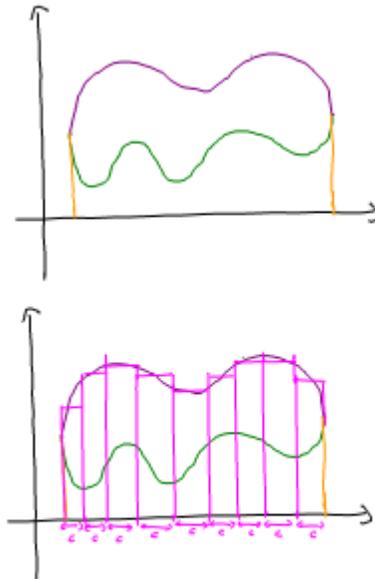


Figure 1: Skizze des Riemann-Intregral-Approaches

Macht das Sinn?

Bemerkung: Meiner Meinung nach liegt die Genialität dieses Apparats darin, dass sie die horizontale Bewegung mechanisch in die Berechnung integriert wird - dabei kommt es nur auf die zurückgelegte Strecke und nicht etwa auf Geschwindigkeit oder gar Beschleunigung an! Es spielt also keine Rolle wie schnell man die Kurve durchläuft, die korrekte Normierung des (mechanisch ausgeführten) Riemannintegrals ist **IMMER** richtig.