

Differentialgleichungen und Matrizen

Richard Küng*

February 5, 2013

1 Lineare Abbildungen

1.1 Vektor- und Hilberträume

In diesem Teilabschnitt rekapitulieren wir kurz die fundamentale Entität der linearen Algebra (Vektorräume) und führen das – in der Physik hochrelevante – Konzept eines Hilbertraums ein.

1.1.1 Vektorräume

Ein (reeller) Vektorraum V ist eine – meist unendliche – Menge von Vektoren $v \in V$ welche folgende Eigenschaften erfüllen:

$$\begin{aligned} v, w \in V &\Rightarrow v + w \in V, \\ v \in V, \lambda \in \mathbb{R} &\Rightarrow \lambda v \in V. \end{aligned}$$

Ein Vektorraum ist also abgeschlossen bezüglich der Addition zweier Elemente und der Streckung/Stauchung selbiger. Das klassische Beispiel für einen reellen VR ist $\mathbb{R}^n$.

Es sei nun V ein n -dimensionaler Vektorraum. Eine Menge $v_1, \dots, v_n \in V$ von Vektoren ist eine Basis von V , falls jeder Vektor $v \in V$ als Linearkombination dieser Vektoren dargestellt werden kann. Formal bedeutet das, dass es für jedes $v \in V$ reelle Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gibt sodass:

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$

gilt. Klarerweise sind diese reellen Konstanten vom Vektor v abhängig, d.h. $\lambda_i = \lambda_i(v)$. Informell kann man sich eine Basis als “Baukasten” vorstellen, mit dessen Hilfe man jeden einzelnen Vektor im Vektorraum “bauen” (aufspannen) kann. Es ist leicht einzusehen, dass es im Allgemeinen unendlich viele verschiedene Basen eines Vektorraums gibt.

*e-mail:richard.kueng@physik.uni-freiburg.de

1.2 Hilberträume

Als Hilbertraum bezeichnen wir einen Vektorraum V , welcher zusätzlich mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ausgestattet ist. Durch dieses Skalarprodukt erhält der Hilbertraum $\mathcal{H} = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ zusätzliche Struktur. Zum Beispiel macht nun das Konzept von orthogonalen Vektoren – also Vektoren $v, w \in V$ mit $\langle v, w \rangle = 0$ Sinn. Insbesondere lassen sich auf Hilberträume orthogonale und orthonormale Basen definieren:

- Eine orthogonale Basis $v_1, \dots, v_n$ des Hilbertraums $\mathcal{H} = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist eine Basis von V , welche aus paarweise orthogonalen Vektoren besteht, d.h. $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ für alle $i \neq j$.
- eine orthonormale Basis $v_1, \dots, v_n$ von $\mathcal{H}$ ist eine orthogonale Basis, deren Elemente noch zusätzlich normiert sind, d.h. $\|v_i\|_2^2 := \langle v_i, v_i \rangle = 1 \ \forall i = 1, \dots, n$. Man beachte, dass sich jede orthogonale Basis $v_1, \dots, v_n$ durch Renormierung – also der Definition $\tilde{v}_i := \frac{1}{\|v_i\|_2} v_i$ – in eine Orthonormalbasis überführen lässt.

Des weiteren ist ein Skalarprodukt zur formalen Definition symmetrischer Abbildungen unabdinglich, doch mehr dazu später. Das Paradebeispiel für einen Hilbertraum ist natürlich der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt $\langle v, w \rangle := \sum_{i=1}^n v_i w_i$. Es gibt jedoch noch etliche weitere interessante Hilberträume, welche insbesondere in der Quantenmechanik von entscheidender Bedeutung sind.

1.3 Lineare Abbildungen und Matrizen

Es seien V, W zwei endlichdimensionale Vektorräume. Eine (reelle) Abbildung $f : V \rightarrow W$ zwischen diesen Vektorräumen heißt linear, falls sie die Vektorraumstruktur erhält. Konkret bedeutet dies, dass sie Vektoren $v \in V$ wieder auf Vektoren $f(v) = w \in W$ abbildet:

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2) &= f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V, \\ f(\lambda v) &= \lambda f(v) \quad \forall v \in V, \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Analog dazu lassen sich komplexe lineare Abbildungen zwischen komplexen Vektorräumen definieren. Für diesen Fall muss obige Eigenschaft dann natürlich für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ gelten.

1.3.1 Matrizen

Eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ (mit $\dim V = n$, $\dim W = m$) ist durch ihre Wirkung auf alle möglichen Vektoren $v \in V$ vollständig charakterisiert. Mithilfe einer (beliebigen) Basis $\mathcal{B} = b_1, \dots, b_n$ von V ist diese Charakterisierung besonders effizient möglich. Wegen der definierenden Eigenschaft der Basis lässt sich nämlich jeder Vektor $v \in V$ als Linearkombination $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ darstellen.

Zusammen mit den fundamentalen Eigenschaften einer linearen Abbildung gilt also:

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i).$$

Somit ist die Wirkung der linearen Abbildung f durch ihr Transformationsverhalten bezüglich der n Basiselemente $w_i = f(v_i) \in W$ vollständig charakterisiert! Durch die Wahl einer Basis $\mathcal{C} = c_1, \dots, c_m$ von W lässt sich dieses Transformationsverhalten besonders ökonomisch niederschreiben.

1. Bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ lässt sich jeder Vektor $v \in V$ als $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$ darstellen.
2. Die lineare Abbildung f überträgt jeden Basisvektor $b_i \in V$ auf einen Vektor $w_i = f(b_i)$ in W .
3. Bezüglich der Basis $\mathcal{C}$ lässt sich jeder solche Vektor w_i als Linearkombination $w_i = \sum_{j=1}^m \omega_{ji} c_j$ darstellen.
4. Wir definieren nun eine $m \times n$ -Matrix F durch das Hintereinanderschreiben aller n Abbildungsvektoren $w_i := f(v_i)$: $F = (w_1 w_2 \dots w_n)$. Zusätzlich definieren wir die Aktion der Matrix auf einen Vektor $v = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T \in V$ folgendermaßen:

$$Fv = (w_1 w_2 \dots w_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} := \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n = f(v).$$

Unsere Matrix spiegelt somit das Verhalten der linearen Abbildung f exakt wieder – was ja auch unsere Absicht war!

5. Verwenden wir nun noch die Basisentwicklung der w_i -s bezüglich $\mathcal{C}$, so erhalten wir folgende Matrix und das vertraute Vektor-Matrix-Zusammenspiel:

$$f(v) = Fv = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \omega_{1n} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & & \omega_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \omega_{m1} & \omega_{m2} & \dots & \omega_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_{1i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_{ni} \end{pmatrix}.$$

Unsere Matrix F gibt also tatsächlich das exakte Verhalten der linearen Abbildung f wieder. Allerdings hängt die Matrix F essentiell von den Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ ab! Die lineare Abbildung selbst ist natürlich basisunabhängig, ihre Darstellung als Matrix ist es jedoch nicht! Wir tragen dieser Tatsache durch das explizite Erwähnen der Basen in der Matrixnotation Rechnung:

$$f := F_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}.$$

Natürlich lassen sich mit diesem Formalismus auch Ketten von linearen Abbildungen behandeln. Betrachtet man z.B. die Kette $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$ und wählt

Basen $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ der jeweiligen Vektorräume, so erhält man für die kombinierte Abbildung $f \circ g : U \rightarrow W$ – mit $f \circ g(u) = g(f(u)) \quad \forall u \in U$ – folgende Matrixdarstellung:

$$f \circ g(u) = FG_{\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W}} = G_{\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}} F_{\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}} u$$

mit der üblichen Matrixmultiplikation zwischen $F_{\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}}$ und $G_{\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}}$. Tatsächlich ist dies vielmehr die Grundlage für die Definition der Matrixmultiplikation.

Nota Bene: Das Konzept einer linearen Abbildung ist eindeutig. Ihre Darstellung als Matrix ist es jedoch nicht (es gibt i.A. unendlich viele verschiedenen Matrizen, welche dieselbe lineare Abbildung darstellen).

1.3.2 Äquivalenz von Matrizen

In diesem Unterabschnitt fokussieren wir uns auf lineare Selbstabbildungen (Automorphismen) $f : V \rightarrow V$ und deren Matrixdarstellungen. Ziel dabei ist das Quantifizieren von obigem nota bene. Wir wissen bereits, dass die Matrix $F_{\mathcal{B}} := F_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}}$ einer linearen Selbstabbildung f abhängig von der gewählten Basis $\mathcal{B}$ von V ist. Ein Basiswechsel $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ verändert also die Matrixdarstellung von f , nicht aber f selbst. Man kann sich jedoch einen solchen Basiswechsel als lineare Selbstabbildung $B : V \rightarrow V$ mit $B(b_i) = c_i$ vorstellen. Tatsächlich erhalten wir somit folgende Matrixdarstellung unseres Basiswechsels:

$$B(v) = B_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} v = (c_1 c_2 \dots c_n) = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit $c_i = \sum_{j=1}^n \beta_{ji} b_j$ (Entwicklung der Basisvektoren c bezüglich der Basis $\mathcal{B}$) und $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$ (Entwicklung von v wieder bezüglich $\mathcal{B}$).

Konsequenterweise muss der umgekehrte Basiswechsel – also der von $\mathcal{C}$ auf $\mathcal{B}$ – durch die inverse Matrix gegeben sein:

$$B_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}} = B_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}^{-1},$$

wobei $B_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}^{-1} B_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} = \mathbb{I}$ gelten muss. Dies folgt aus der einfachen Tatsache, dass sich die beiden Basiswechsel genau aufheben müssen: “einmal Basiswechsel und zurück darf nichts ändern!”.

Nun kommen wir zur Schlüsselbeobachtung dieses Abschnitts: Für eine lineare Abbildung f mit Matrixdarstellung $F_{\mathcal{B}}$ bezüglich $\mathcal{B}$ und $F_{\mathcal{C}}$ bezüglich $\mathcal{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{C}} &= B_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} F_{\mathcal{B}} B_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}} = B_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} F_{\mathcal{B}} B_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}^{-1}, \\ F_{\mathcal{B}} &= B_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}} F_{\mathcal{C}} B_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} = B_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}^{-1} F_{\mathcal{C}} B_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}. \end{aligned}$$

Somit stellen zwei Matrizen F, G dieselbe lineare Abbildung dar, falls es eine weitere Matrix B (die Basiswechselmatrix) gibt, sodass $F = BGB^{-1}$. Umgekehrt kann man sich leicht davon überzeugen, dass jede invertierbare Matrix B einem möglichen Basiswechsel entspricht. Wir kommen damit zu folgendem Schluss:

Äquivalenzrelation: Zwei Matrizen F, G sind äquivalent, falls eine Matrix B existiert, sodass $F = BGB^{-1}$ (oder $G = BFB^{-1}$). Dabei beschreiben äquivalente Matrizen ein und dieselbe lineare Selbstabbildung $f : V \rightarrow V$.

Abschließend bemerken wir, dass eine solche Herangehensweise auch für allgemeine lineare Abbildungen möglich ist. Unsere Einschränkung auf Selbstabbildungen ist daher nicht notwendig, vereinfacht aber die behandelten Konzepte beträchtlich.

Beispiel: Die beiden Matrizen $F_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mit $\mathcal{E} = \{(1, 0)^T, (0, 1)^T\}$ und $G_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ mit $\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)^T\}$ sind äquivalent. Betrachte dazu die Basistransformation $B_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ und ihr Inverses $B_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Dann gilt offenbar

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und somit gilt tatsächlich $G_{\mathcal{B}} = B_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}} F_{\mathcal{E}} B_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}}$.

1.3.3 Diagonalisieren von Matrizen

Eine $n \times n$ -Matrix M ist diagonalisierbar, falls sie äquivalent zu einer Diagonalmatrix $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ist, d.h falls es eine invertierbare $n \times n$ -Matrix B gibt, welche

$$M = BDB^{-1} \tag{1}$$

garantiert. Diese Matrix ist eindeutig. Nicht jede Matrix ist diagonalisierbar, ein Gegenbeispiel ist zum Beispiel durch $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

Mit unserer Interpretation von Matrizen als Manifestierung von linearen Abbildungen lässt sich die Diagonalisierung einer Matrix auf anschauliche Art interpretieren: Mit der Wahl einer Basis $\mathcal{B} = b_1, \dots, b_n$ von V ($\dim V = n$) lässt sich die $n \times n$ -Matrix $F_{\mathcal{B}}$ als lineare Selbstabbildung $f : V \rightarrow V$ interpretieren. Die invertierbare Matrix B entspricht dann einer Basiswechselmatrix $B_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$, wobei $\mathcal{C} = c_1, \dots, c_n$ eine weitere Basis von V bezeichnet. Bezüglich $\mathcal{C}$ ist die lineare Abbildung f folglich durch die Diagonalmatrix $F_{\mathcal{C}} = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

gegeben. Insbesondere bedeutet dies, dass

$$\begin{aligned} f(c_1) &= F_{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda c_1, \\ &\vdots \\ f(c_n) &= F_{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda c_n, \end{aligned}$$

gilt. Die lineare Abbildung f bildet somit die Vektoren $c_i \in V$ auf ein λ_i -faches von sich selbst ab. Aber das ist genau die formale Definition von Eigenwert und zugehörigen Eigenvektor! Darüber hinaus ist f eine lineare Abbildung und daher basisunabhängig. Die Eigenvektoren $c_i \in V$ sind somit direkt über die lineare Abbildung f – und nicht über eine explizite Matrixdarstellung – definiert! Somit sind sie genau wie die lineare Abbildung basisunabhängig (das sollten sie auch sein, da sie fundamental Elementen des Vektorraums selbst entsprechen und solche sind immer basisunabhängig) und für jede beliebige Matrixdarstellung $F_{\mathcal{B}}$ von f gilt $F_{\mathcal{B}}c_i = \lambda_i c_i$ mit $c_i = \sum_{j=1}^n \zeta_j^i b_j$ (c_i muss natürlich in der zu $F_{\mathcal{B}}$ passenden Basis $\mathcal{B}$ dargestellt werden).

Nota Bene: Eigenvektoren und Eigenwerte einer Matrix sind basisunabhängige Entitäten der der Matrix zugrundeliegenden linearen Abbildung.

1.3.4 Bestimmen der Diagonalmatrix: Eigenwerte und Eigenvektoren

Folgende praktisch wichtige Frage bleibt noch offen: Wie findet man die Diagonalmatrixdarstellung D und zugehörige Basiswechselmatrix B für beliebige diagonalisierbare $n \times n$ -Matrix $A_{\mathcal{B}}$, wobei $\mathcal{B}$ eine beliebige Basis von V darstellt. Dies ist das berühmte Eigenwertproblem und kann durch folgende Prozedur angegangen werden:

1. Finden der Eigenwerte: Die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind die Nullstellen (Lösungen) des charakteristischen Polynoms $p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I)$.
2. Finden des zu λ_i gehörenden Eigenvektors v_i : Der Eigenvektor kann durch sein definierendes lineares Gleichungssystem $Av_i = \lambda v_i$ gefunden werden.

Die Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$ von A stellen eine legitime Basis $\mathcal{V}$ von V dar. Bezüglich dieser Basis gilt gemäß unserer obigen Argumentation klarerweise $A_{\mathcal{V}} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Die noch ausstehende Basiswechselmatrix $B_{\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{B}}$ ist einfach durch $(v_1 \dots v_n)$ gegeben, wobei die c_i 's bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ dargestellt werden

müssen. Ihr Inverses $B_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V}} = B_{\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{B}}^{-1}$ kann ebenfalls algorithmisch bestimmt werden. Damit erhalten wir folgende allgemeine Diagonalisierung:

$$A_{\mathcal{B}} = B_{\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{B}} A_{\mathcal{V}} B_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V}} = B D B^{-1}.$$

Beispiel: Als praktisches Beispiel diagonalisieren wir die symmetrische 3×3 -Matrix $A_{\mathcal{E}}$, welche bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ durch

$$A_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ gegeben sei. Wir starten mit dem Bestimmen der Eigenwerte. Offenbar gilt}$$

$$\begin{aligned} p_{A_{\mathcal{E}}}(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) - 2(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)\lambda(3-\lambda) \end{aligned}$$

und somit $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und λ_3 . In diesem Fall können die zugehörigen Eigenvektoren einfach geraten werden. Ein “educated guess” liefert: $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T$ und $v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)^T$, welche eine zulässige Basis $\mathcal{V}$ von V darstellen. Die Basistransformationsmatrix

$$B_{\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{E}} \text{ ist somit durch } \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{ gegeben und ihr Inverses}$$

$$\text{entspricht } B_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}} = B_{\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{E}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}. \text{ Somit erhalten wir}$$

die gesuchte Diagonalisierung:

$$A_{\mathcal{E}} = B_{\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{E}} A_{\mathcal{V}} B_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

1.3.5 Symmetrische Matrizen

Wir betrachten erneut lineare Selbstabbildungen, diesmal aber von einem Hilbertraum $\mathcal{H} = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ auf sich selbst. Es sei $\mathcal{B} = b_1, \dots, b_n$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$. Die zu einer solchen Selbstabbildung gehörende $n \times n$ -Matrix $A_{\mathcal{B}}$ ist symmetrisch, falls $A_{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}}^T$ gilt. Eine symmetrische Matrix ist also spiegelsymmetrisch bezüglich der Hauptdiagonale. Symmetrische Matrizen (respektive die mit ihnen assoziierten linearen Selbstabbildungen) haben folgende wichtige Eigenschaften:

1. Eine symmetrische Matrix ist immer diagonalisierbar und ihre Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind stets reell.

2. Die zu den Eigenwerten gehörigen Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$ können orthonormal zueinander gewählt werden, d.h. $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} \forall i, j = 1, \dots, n$.
3. Eine Basiswechselmatrix $B_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$ zwischen zwei Orthonormalbasen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ ist immer eine orthogonale Matrix, d.h. es gilt $B_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}} = B_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}^{-1} = B_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}^T$. Die Inverse einer solchen orthogonalen Matrix kann also einfach durch Transponieren ermittelt werden.

Der letzten Eigenschaft liegt die Tatsache zugrunde, dass die Transponierte einer Matrix eigentlich über das Skalarprodukt definiert wird: $A_{\mathcal{E}}^T$ ist die eindeutig bestimmte $n \times n$ -Matrix, welche $\langle A_{\mathcal{E}}^T v, w \rangle = \langle v, A_{\mathcal{E}} w \rangle \forall v, w \in \mathcal{H}$ erfüllt. Das Transponieren einer Matrix – also das Vertauschen von Zeilen und Spalten – kann aus dieser Definition abgeleitet werden.

Nota Bene: Alle diese Eigenschaften sind praktisch sehr relevant. Eigenschaft 1 garantiert, dass das Lösen des Eigenwertproblems sicher funktioniert. Eigenschaft 2 ist extrem nützlich beim effizienten Raten von Eigenvektoren und Eigenschaft 3 vereinfacht die Diagonalisierungskette (1) erheblich.

1.3.6 Potenzen, Wurzeln und Exponential von Matrizen

Hier beschränken wir uns auf diagonalisierbare $n \times n$ -Matrizen. Da die Interpretation einer quadratischen Matrix als Darstellung einer zugrundeliegenden Selbstabbildung in diesem Abschnitt nicht von zentraler Bedeutung ist, vernachlässigen wir die Basisabhängigkeit der Matrix und unterdrücken konsequenterweise den Basisindex. Für jede diagonalisierbare Matrix A gibt es eine invertierbare Matrix B , sodass

$$A = BDB^{-1} \quad \text{mit } D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

gilt. Die Matrix D besitzt nur auf der Diagonalen reelle Einträge. Diese Einträge können durch bekannten Rechenoperationen (Potenzieren, Wurzelziehen, etc.) auf konsistente Art modifiziert werden:

- Quadrieren von A : Die Matrix A kann quadriert werden, indem man einfach alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ quadriert:

$$A^2 := B \text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2) B^{-1}$$

Man beachte, dass diese Definition äquivalent ist zur intuitiven Definition $A^2 := AA$:

$$AA = BDB^{-1}BDB^{-1} = BD\mathbb{I}DB^{-1} = BD^2B^{-1} = B \text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2) B^{-1} = A^2.$$

- Potenzieren von A : Eine beliebige p -te Potenz der Matrix A wird analog zum Quadrat von A definiert:

$$A^p := B \text{diag}(\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p) B^{-1}.$$

Diese Definition ist wie zuvor konsistent mit der intuitiveren Definition $A^p = A \dots A$ über das p -fache Produkt der Matrix.

- Wurzel von A : Mithilfe der Diagonaldarstellung lässt sich die Wurzel einer Quadratmatrix A folgendermaßen definieren:

$$A^{\frac{1}{2}} := B \operatorname{diag} \left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n} \right) B^{-1}.$$

Man beachte, dass diese Matrix nicht notwendigerweise reell ist. Reell ist sie nur, wenn alle Eigenwerte der Matrix größer oder gleich null sind (derartige Matrizen nennt man positiv semidefinit). Offensichtlich erfüllt diese Wurzelmatrix die definierende Eigenschaft der Quadratwurzel:

$$\begin{aligned} A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} &= B \operatorname{diag} \left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n} \right) B^{-1} B \operatorname{diag} \left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n} \right) B^{-1} \\ &= B \operatorname{diag} \left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n} \right) \operatorname{diag} \left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n} \right) B^{-1} \\ &= B \operatorname{diag} (\lambda_1, \dots, \lambda_n) B^{-1} = A. \end{aligned}$$

- Matrixexponential: Das Exponential einer Quadratmatrix A lässt sich folgendermaßen definieren:

$$\exp(A) := B \operatorname{diag} (\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_n)) B^{-1}.$$

Eine äquivalente Definition ist durch die Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion gegeben:

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k,$$

wobei A^k die oben definierte k -te Potenz von A bezeichnet. Dieses Matrixexponential erfüllt die wichtigste Eigenschaft der Exponentialfunktion:

$$\frac{d}{dt} \exp(At) = A \exp(At). \quad (2)$$

Diese Eigenschaft ist für das Lösen von matrixwertigen Differentialgleichungen (nächstes Kapitel) von entscheidender Bedeutung.

2 Lineare matrixwertige Differentialgleichungen

2.1 Rekapitulation: gewöhnliche lineare Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt wollen wir kurz den eindimensionalen Fall wiederholen, welchen wir im nächsten Abschnitt auf den mehrdimensionalen (Matrix-) Fall verallgemeinern wollen.

2.1.1 Homogene lineare DGL erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Hier beschränken wir uns auf den einfachsten möglichen Fall einer Differentialgleichung. Diese ist stets von der Form

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\lambda x(t), \\ x(0) &= c,\end{aligned}$$

wobei λ und c beliebige Konstanten sind. Die erste Zeile enthält die eigentliche Differentialgleichung, während die zweite Zeile die Randbedingung beinhaltet. Offensichtlich ist die Lösung dieser Gleichung durch folgende Funktion gegeben:

$$x(t) = c \exp(-\lambda t).$$

Trotz ihrer Einfachheit ist diese DGL hochrelevant für die Naturwissenschaften. Zum Beispiel folgt der radioaktive Zerfall einer Substanz (oder allgemein jede unimolekulare Reaktion derselben) diesem Zeitgesetz.

2.1.2 Homogene lineare DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

In diesem Teilabschnitt fokussieren wir uns auf das eindimensionale Gleichungssystem eines (klassischen) harmonischen Oszillators:

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$$

mit der Eigenfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \in \mathbb{R}$. Hier haben wir zunächst auf die Nennung der notwendigen 2 Randbedingungen (eine DGL zweiter Ordnung braucht 2 Randbedingungen um völlig determiniert zu sein) verzichtet und fokussieren uns zunächst auf die allgemeine Lösung der DGL. Diese kann auf folgende 3 äquivalente Arten dargestellt werden:

1. $x(t) = ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t},$
2. $x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t),$
3. $x(t) = a \cos(\omega t + \delta).$

Die einzelnen Konstanten müssen nun an die gegebenen Randbedingungen angepasst werden. Wir demonstrieren dies anhand eines Beispiels: $x(0) = \Delta$ und $\dot{x}(0) = 0$ (Feder wird um Δ ausgelenkt und dann losgelassen):

1. Offenbar müssen $x(0) = a + b \stackrel{!}{=} \Delta$ und $\dot{x}(0) = i\omega(a - b) \stackrel{!}{=} 0$ gelten. Daraus können wir $a = b = \frac{\Delta}{2}$ schließen: $x(t) = \frac{\Delta}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}).$
2. Hier gilt $x(0) = c$ und $\dot{x}(0) = \omega d$. Durch Vergleichen mit den Randbedingungen, können wir daraus $c = \Delta$ und $d = 0$ ableiten: $x(t) = \Delta \cos(\omega t).$

3. Für diesen Fall haben wir $x(0) = g \cos(\delta)$ und $\dot{x}(0) = -g\omega \sin(\delta)$. Aus $\dot{x}(0) = 0$ können wir nun $\delta = 0$ ($\delta = \pi$ ist prinzipiell auch möglich, allerdings führt das auf eine äquivalente Lösung) schließen. Folgerichtig erhalten wir mit $x(0) = \Delta$ auch hier die offensichtliche Lösung $x(t) = \Delta \cos(\omega t)$.

2.2 Matrixdifferentialgleichungen

In diesem wichtigen Kapitel verallgemeinern wir das Konzept gewöhnlicher (skalarer) Differentialgleichungen auf lineare Vektorwertige. Dafür werden wir die oben eingeführten Matrixkonzepte – insbesondere das Matrixexponential – benötigen. Von nun an werden wir ausschließlich im $\mathbb{R}^n$ mit der Standardbasis $\mathcal{E}$ des jeweiligen Vektorraums arbeiten, weshalb wir auf explizites Erwähnen dieser (Suffix $\mathcal{E}$) verzichten.

2.2.1 Vektorwertige lineare Differentialgleichungen erster Ordnung im $\mathbb{R}^n$

Kern dieses Abschnittes bildet folgende DGL für n -dimensionale Vektoren $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}(t) &= A\vec{x}(t), \\ \vec{x}(0) &= \vec{c},\end{aligned}$$

wobei A eine beliebige diagonalisierbare $n \times n$ -Matrix bezeichnet und $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ die vektorielle Randbedingung liefert. Mithilfe der definierenden Eigenschaft des Matrixexponentials (2) können wir diese DGL nun problemlos lösen:

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= \exp(At) \vec{c} \quad \text{da} \\ \dot{\vec{x}}(t) &= \frac{d}{dt} \exp(At) \vec{c} = A \exp(At) \vec{c} = A\vec{x}(t), \\ \vec{x}(0) &= \exp(A0) \vec{c} = \exp(0_{n \times n}) \vec{c} = \mathbb{I} \vec{c} = \vec{c}.\end{aligned}$$

Allerdings kann sich das explizite Ermitteln des Matrixexponentials als mühsam herausstellen. Wir präsentieren daher folgende äquivalente Lösung, welche viel einfacher ermittelt werden kann:

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^n d_i e^{\lambda_i t} v_i, \tag{3}$$

wobei λ_i den i -ten Eigenwert und v_i den zugehörigen Eigenvektor darstellen. Die Konstanten d_i müssen durch explizites Anpassen dieser Lösung an die Randbedingung $\vec{x}(0) = \vec{c}$ in einem weiteren Arbeitsschritt ermittelt werden. Obwohl wir auf einen Beweis dieser effizienteren Lösung verzichten, soll erwähnt werden, dass sie durch einen Basiswechsel $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}$ in die Eigenvektorbasis von A hergeleitet werden kann.

Wir schließen diesen Teilabschnitt mit einem expliziten Beispiel ab:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}(t) &= k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}(t), \\ \vec{x}(0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Wir haben das Eigenwertproblem der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ bereits gelöst und kennen daher $\lambda_1 = k$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, sowie $\lambda_2 = -k$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Gemäß (3) lautet die allgemeine Lösung also:

$$\vec{x}(t) = ae^{kt} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + be^{-kt} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Anpassen an die Randbedingung liefert:

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Somit müssen $a + b = 1$ und $a - b = 3$ gelten. Dies impliziert $a = 2$ und $b = -1$ und wir haben unsere Lösung gefunden:

$$\vec{x}(t) = e^{kt} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + e^{-kt} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eine kurze Überprüfung dieses Resultats untermauert seine Richtigkeit:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}(t) &= ke^{kt} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - ke^{-kt} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}(t) &= ke^{kt} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + ke^{-kt} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= ke^{kt} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - ke^{-kt} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Hier sehen wir auch, warum der Eigenvektoransatz funktioniert. Diese Vektoren überstehen nämlich die Aktion der Matrix unbeschadet!

2.2.2 Vektorwertige lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung im $\mathbb{R}^n$

Dieser Abschnitt behandelt die wichtigste Anwendung unserer Konzepte, nämlich den physikalisch hochrelevanten Fall von gekoppelten harmonischen Schwingungen. Ein derartiges physikalisches System kann nämlich stets auf folgende Form

gebracht werden:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{x}}(t) &= -A\vec{x}(t), \\ \vec{x}(0) &= \vec{c}, \\ \dot{\vec{x}}(0) &= \vec{d},\end{aligned}$$

wobei A eine diagonalisierbare Matrix bezeichnet und $\vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^n$ die nötigen Randbedingungen liefern. Mithilfe der definierenden Eigenschaften der Wurzelmatrix ($A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} = A$) und des Matrixexponentials (2) lässt sich die formale Lösung dieses Problems wieder sofort ermitteln:

$$\vec{x}(t) = \exp\left(iA^{\frac{1}{2}}t\right)\vec{a} + \exp\left(-iA^{\frac{1}{2}}t\right)\vec{b}, \quad (4)$$

wobei die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nichttrivial aus $\vec{c}$ und $\vec{d}$ bestimmt werden müssen. Da diese Lösungsermittlung ohnehin aufwändig und nicht ökonomisch ist, wollen wir darauf auch nicht weiter eingehen. Stattdessen wollen wir im Geiste des vorigen Kapitels folgende ökonomische Alternativlösungen propagieren:

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= \sum_{i=1}^n \left(a_i \exp\left(i\sqrt{\lambda_i}t\right) + b_i \exp\left(-i\sqrt{\lambda_i}t\right) \right) \vec{v}_i, \\ \vec{x}(t) &= \sum_{i=1}^n \left(a_i \cos\left(\sqrt{\lambda_i}t\right) + b_i \sin\left(\sqrt{\lambda_i}t\right) \right) \vec{v}_i, \\ \vec{x}(t) &= \sum_{i=1}^n a_i \cos\left(\sqrt{\lambda_i}t + \delta_i\right) \vec{v}_i,\end{aligned}$$

wobei λ_i und $\vec{v}_i$ wieder die Eigenwert-Eigenvektor-Paare der Matrix A bezeichnen. Die Äquivalenz dieser 3 Lösungsansätze sollte aus den vorigen Kapiteln offensichtlich sein. Abermals verzichten wir auf eine explizite Herleitung der Lösung (4) (es hat wieder etwas damit zu tun, dass die Eigenvektoren unverwundbar gegenüber A sind). Wir beenden diesen Abschnitt wieder mit einem expliziten Beispiel im $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{x}}(t) &= -\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}(t), \\ \vec{x}(0) &= (1, -1, 0)^T, \\ \dot{\vec{x}}(0) &= (1, 1, 1)^T.\end{aligned}$$

Auch für diese Matrix haben wir das Eigenwertproblem gelöst und kennen Eigenwerte und Eigenvektoren: $\lambda_1 = 0, \vec{v}_1 = (1, 1, 1)^T$, $\lambda_2 = \omega^2, \vec{v}_2 = (1, 0, -1)^T$ und $\lambda_3 = 3\omega^2, \vec{v}_3 = (1, -2, 1)^T$. Somit können wir die allgemeine Lösung (in Form

2) sofort hinschreiben:

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= (a_1 + b_1 t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (a_2 \cos(\omega t) + b_2 \sin(\omega t)) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &+ (a_3 \cos(\sqrt{3}\omega t) + b_3 \sin(\sqrt{3}\omega t)) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Anpassen an die Randbedingungen liefert:

$$\begin{aligned}\vec{x}(0) &= a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \dot{\vec{x}}(0) &= b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \omega b_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \omega b_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

und somit $a_1 = 0, a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$, sowie $b_1 = 1, b_2 = b_3 = 0$. Damit haben wir die Lösung unseres Problems gefunden:

$$\vec{x}(t) = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cos(\omega t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cos(\sqrt{3}\omega t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3 Beispiele aus der Physik

In diesem Abschnitt illustrieren wir die oben gelernten Methoden an mehreren physikalischen Beispielen.

3.1 Beispiel 1: 3 gekoppelte harmonische Oszillatoren

Wir betrachten 3 gekoppelte harmonische Oszillatoren mit gleicher Masse m und identischer Federkonstante k (Beispiel 9.7.2 im Fetscher-Script). Wir bezeichnen die Auslenkung des jeweiligen Oszillators aus der Ruhelage mit x_i und betrachten alle 3 Auslenkungen zusammen als einen Auslenkungsvektor $(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^n$. Die Bewegungsgleichungen lauten folgendermaßen:

$$\begin{aligned}m\ddot{x}_1 &= k(x_2 - x_1), \\ m\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2), \\ m\ddot{x}_3 &= -k(x_3 - x_1).\end{aligned}$$

Mithilfe der Definition $\omega := \sqrt{\frac{k}{m}}$ (Eigenfrequenz) ist dieses Gleichungssystem äquivalent zu folgender Matrixgleichung:

$$\ddot{\vec{x}}(t) = -\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}(t).$$

Wir haben dieses Gleichungssystem aber bereits gelöst und kennen die allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= (a_1 + b_1 t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (a_2 \cos(\omega t) + b_2 \sin(\omega t)) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &+ \left(a_3 \cos(\sqrt{3}\omega t) + b_3 \sin(\sqrt{3}\omega t) \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Nun kommt den einzelnen Termen jedoch eine physikalische Bedeutung zu – siehe dazu das relevante Kapitel im Fetscherscript.

3.2 Beispiel 2: Eine lange Federkette

Hier betrachten wir das Übungsbeispiel 48, nämlich eine lineare Kette von N identischen harmonischen Oszillatoren. Sie alle haben Masse m und Federkonstante k und wir definieren $\omega := \sqrt{\frac{k}{m}}$. Die Bewegungsgleichung für die verschiedenen Auslenkungen lautet also:

$$\begin{aligned}m\ddot{x}_1 &= k(x_2 - x_1) - kq_1 = k(x_2 - 2x_1), \\ &\vdots \\ m\ddot{x}_i &= k(x_{i+1} - x_i) - k(x_i - x_{i-1}) = k(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}), \\ &\vdots \\ m\ddot{x}_N &= -kx_N - k(x_N - x_{N-1}) = k(x_{N-1} - 2x_N).\end{aligned}$$

Man beachte, dass sich die erste und letzte Gleichung von allen anderen unterscheiden. Dies liegt daran, dass die beiden Endpunkte mit einer Feder an einer soliden Wand festgemacht sind. Wir können dieser Tatsache Rechnung tragen, indem wir diese Wandpunkte als x_0 und x_{N+1} in unseren Auslenkungsvektor einbauen. Dabei verlangen wir aber natürlich stets $x_0 = x_{N+1} = 0$. Mit diesem Trick lassen sich die gekoppelten Bewegungsgleichungen nun durch eine DGL für den Auslenkungsvektor $\vec{x}(t) = (x_0, x_1, \dots, x_N, x_{N+1})^T \in \mathbb{R}^{N+2}$ darstellen:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{x}}(t) &= -\omega^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}(t), \\ x_0(t) &= x_{N+1}(t) = 0.\end{aligned}$$

Somit haben wir durch unseren Trick die Randbedingungen fester Wände explizit einfließen lassen. Unsere Aufgabe besteht also darin, alle Eigenwerte und Eigenvektoren dieser $N \times N$ -Matrix A zu finden. Die Matrix A ist symmetrisch,

weshalb wir wissen, dass sie diagonalisierbar ist und die Eigenvektoren orthogonal zueinander stehen müssen. Anstatt das Eigenwertproblem dieser großen Matrix konventionell zu lösen, versuchen wir die einzelnen Eigenvektoren direkt zu raten. Als Ansatz dient uns dazu $\vec{v} = (v_1, \dots, v_N)^T$ mit $v_j = a \sin(j\phi)$, wobei a, ϕ Konstanten sind. Dieser Ansatz erfüllt die Randbedingung $v_0 = 0$ per Konstruktion, doch die zweite Randbedingung schränkt die Wahl von ϕ bereits erheblich ein. Offenbar muss nämlich gelten $v_{N+1} = a \sin((N+1)\phi) = 0$ was nur möglich ist, falls $\phi_n = \frac{n\pi}{N+1}$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt. Den so verfeinerten Ansatz können wir nun auf die Matrix loslassen. Für die i -te Komponente gilt dabei:

$$\begin{aligned}(A\vec{v})_i &= -v_{i-1} + 2v_i - v_{i+1} = -\omega^2 a \{-\sin((i-1)\phi_n) + 2\sin(i\phi_n) - \sin((i+1)\phi_n)\} \\ &= -\omega^2 a \{2\sin(i\phi_n) - 2\cos(\phi_n)\sin(i\phi_n)\} \\ &= -2\omega^2 (1 - \cos(\phi_n)) a \sin(i\phi_n) \\ &= -4\omega^2 \sin^2\left(\frac{\phi_n}{2}\right) v_i.\end{aligned}$$

Hier haben wir die trigonometrischen Identitäten

$$\begin{aligned}\sin((n+1)x) + \sin((n-1)x) &= 2\cos(x)\sin(nx), \quad \text{und} \\ 1 - \cos(x) &= 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

aus Aufgabe 47 verwendet. Fügen wir all die möglichen Komponenten $i = 0, \dots, N+1$ zusammen, erhalten wir folgenden Tatbestand:

$$A\vec{v}_n = -4\omega^2 \sin^2\left(\frac{\phi_n}{2}\right) \vec{v}_n,$$

wobei wir die Abhängigkeit unseres Eigenvektors von $n \in \mathbb{N}$ über ϕ_n explizit gemacht haben. Der zu $\vec{v}_n$ gehörige Eigenwert ist somit durch $\Omega_n^2 := -\lambda(n) = 4\omega^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{2(N+1)}\right)$ gegeben. Gemäß unserem Wissen über Matrixdifferentialgleichungen lautet die allgemeine Lösung unserer DGL also:

$$\vec{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\Omega_n t + \delta_n) \vec{v}_n.$$