Mathematik III:
Partielle Differentialgleichungen
D-CHEM

Richard Küng

July 5, 2012

Präambel: Dieses Script ist auf Grundlage der Vorlesungsnotizen zu Mathematik III (Partielle Differentialgleichungen D-CHEM) von Dr. Francesca Da Lio entstanden. Die darin enthaltenen Beispiele stammen zum Teil aus besagter Vorlesung und den begleitenden Übungen, zum Teil vom Autor selbst. Das Script ersetzt weder besagte Vorlesungsnotizen, noch gängige Lehrbücher. Für akademische Lehrzwecke steht es gerne zur Verfügung, wobei entsprechende Nennung der Autorenschaft als selbstverständlich angenommen wird.

Contents

1 Einführung

Beim Versuch einer quantitativen Beschreibung der Natur stoßen Physiker, Chemiker und Ingenieure zuhauf auf Differentialgleichungen. Einige sind gewöhnlich (d.h sie hängen effektiv nur von einer Variable ab), andere sind partieller Natur (sie hängen von mehr als einer Variable ab). Wir wollen kurz einige bekannte Beispiele nennen:

- gewöhnliche Differentialgleichungen: Radioaktiver Zerfall, biologische Wachstumsprozesse, newton'sche Bewegungsgleichungen.
- partielle Differentialgleichungen: Schrödingergleichung, Wellengleichung, Wärmeleitungsgleichung.

Dieser Kurs beschäftigt sich mit dem Lösen von partiellen Differentialgleichungen, was schwieriger ist als das Lösen von gewöhnlichen DGL's. Dabei wird stets dieselbe Strategie verwendet.
Man versucht partielle DGL's auf gewöhnliche DGL's zurückzuführen. Diese kann man dann (hoffentlich) mit den gängigen Standardmethoden (Kapitel 3) lösen.

2 Die komplexen Zahlen

2.1 Die komplexe Ebene

Die komplexen Zahlen stellen eine Verallgemeinerung der reellen Zahlen dar. Jede komplexe Zahl z kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$z = a + ib \qquad \begin{array}{lcc} a \in \mathbb{R} & \ldots & \text{Realteil} \\ b \in \mathbb{R} & \ldots & \text{Imaginärteil.} \end{array}$$

Man kann sich die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als zweidimensionale Ebene $\mathbb{R}^2$ vorstellen ($\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$). In diesem Bild entspricht die x-Achse $\mathbb{R}$ (also der reellen Zahlengerade) und die y-Achse $i\mathbb{R}$. Jede komplexe Zahl stellt genau einem Punkt in dieser Ebene dar ($z = a + ib$ gleicht dem Punkt (a, b)). Eine solche Darstellung der komplexen Zahlen entspricht typischen kartesischen Koordinaten.
Die wichtigste Eigenschaft einer komplexen Zahl z ist ihr Betrag $|z|$. Er beschreibt ihren Abstand zum Ursprung. Um eine vernünftige Formel für ihn zu finden, müssen wir allerdings folgende Operation einführen.

2.1.1 Definition (*komplexe Konjugation*)

Die komplexe Konjugation $^* : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist für eine beliebige komplexe Zahl $z = a + ib$ folgendermaßen definiert:

$$z^* = a - ib.$$

Die komplexe Konjugation entspricht einer Spiegelung an der x-Achse: (a, b) wird auf $(a, -b)$ abgebildet. Mit dieser Operation lässt sich der Betrag folgendermaßen berechnen.

2.1.2 Satz (*Betrag einer komplexen Zahl*)

Für den Betrag einer komplexen Zahl gilt folgende Formel:

$$|z|^2 = zz^* = z^* z.$$

Beweis: Wir können eine beliebige komplexe Zahl $z = a + ib$ mit dem Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ identifizieren. Der Abstand dieses Punktes zum Ursprung ist durch $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Pythagoras) gegeben. Offenbar gilt außerdem:

$$\begin{aligned} z^* z &= (a - ib)(a + ib) = (a + ib)(a - ib) = zz^* \\ zz^* &= (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2, \end{aligned}$$

und somit:

$$zz^* = z^* z = a^2 + b^2 = |z|^2. \qquad \square$$

Wichtige mathematische Objekte, wie etwa Funktionen oder auch Vektoren, sind für die komplexen Zahlen ebenso definiert wie für die reellen Zahlen. Die wichtigste komplexe Funktion ist die komplexe Exponentialfunktion.

2.1.3 Definition (*komplexe Exponentialfunktion*)

Die komplexe Exponentialfunktion $\exp : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ ist gegeben durch:

$$x \mapsto \mathrm{e}^{ix} = \cos(x) + i \sin(x). \tag{1}$$

Bemerkung: Der Zusammenhang $\mathrm{e}^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ kann mithilfe von Taylorentwicklungen bewiesen werden.
Die komplexe Exponentialfunktion hat einige interessante Eigenschaften.

2.1.4 Satz (*Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion*)

Es gilt

1. Die Funktion ist 2π-periodisch: $\mathrm{e}^{i(x+2\pi)} = \mathrm{e}^{ix}$.
2. Die komplexe Konjugation ändert das Vorzeichen im Exponenten: $\left(\mathrm{e}^{ix}\right)^* = \mathrm{e}^{-ix}$.
3. Der Betrag ist immer 1: $\left|\mathrm{e}^{ix}\right| = 1 \; \forall x \in [0, 2\pi]$.

4. Typische Funktionswerte:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{0} &= \mathrm{e}^{2\pi i} = 1 \\
\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} &= \mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{2}} = i \\
\mathrm{e}^{i\pi} &= \mathrm{e}^{-i\pi} = -1 \\
\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{2}} &= \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}} = -i.
\end{aligned}$$

5. Zusammenhang zum Cosinus: $\cos(x) = \frac{1}{2}\left\{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}\right\}$.

6. Zusammenhang zum Sinus: $\sin(x) = \frac{1}{2i}\left\{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}\right\}$.

7. $\tilde{A}\mathrm{e}^{ix} + \tilde{B}\mathrm{e}^{-ix} = A\cos(x) + B\sin(x)$

Beweis:

1. Folgt direkt aus der 2π-Periodizität von Sinus und Cosinus:

$$\mathrm{e}^{i(x+2\pi)} = \cos(x+2\pi) + i\sin(x+2\pi) = \cos(x) + i\sin(x) = \mathrm{e}^{ix}.$$

2. Folgt aus der Tatsache, dass Cosinus eine gerade $(\cos(-x) = \cos(x))$, Sinus aber eine ungerade Funktion $(\sin(-x) = -\sin(x))$ ist:

$$\left(\mathrm{e}^{ix}\right)^* = \{\cos(x) + i\sin(x)\}^* = \cos(x) - i\sin(x) = \cos(-x) + i\sin(-x) = \mathrm{e}^{-ix}.$$

3. Folgt unmittelbar aus 2: $\left|\mathrm{e}^{ix}\right| = \sqrt{\mathrm{e}^{ix}\left(\mathrm{e}^{ix}\right)^*} = \sqrt{\mathrm{e}^{ix}\mathrm{e}^{-ix}} = \sqrt{\mathrm{e}^{ix-ix}} = \sqrt{\mathrm{e}^{0}} = \sqrt{1} = 1$.

4. Werte einsetzen in (1). Zum Beispiel: $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i = i$. Die Gleichheit $\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{2}} = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$ folgt aus der 2π-Periodizität der Funktion: $\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^{i\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi\right)} = \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{2}}$.

5. und 6. Aus (1) und 2. wissen wir, dass folgende Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{ix} &= \cos(x) + i\sin(x) \quad I. \\
\mathrm{e}^{-ix} &= \cos(x) - i\sin(x) \quad II.
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun $I. + II.$, so erhalten wir:

$$\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix} = 2\cos(x) \Rightarrow \cos(x) = \frac{1}{2}\left\{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}\right\}.$$

Betrachten wir allerdings $I. - II.$, so ergibt sich stattdessen:

$$\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix} = 2i\sin(x) \Rightarrow \sin(x) = \frac{1}{2i}\left\{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}\right\}. \quad \square$$

7. Offenbar gilt mithilfe von 5. und 6.:

$$\begin{aligned} A\cos(x) + B\sin(x) &= \frac{A}{2}\left\{e^{ix} + e^{-ix}\right\} + \frac{B}{2i}\left\{e^{ix} - e^{-ix}\right\} \\ &= \left\{\frac{A}{2} + \frac{B}{2i}\right\} e^{ix} + \left\{\frac{A}{2} - \frac{B}{2i}\right\} e^{-ix} \\ &= \tilde{A}e^{ix} + \tilde{B}e^{-ix}. \end{aligned}$$

Somit gilt die Gleichheit für:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \frac{A}{2} + \frac{B}{2i} \\ \tilde{B} &= \frac{A}{2} - \frac{B}{2i}, \end{aligned}$$

und wir haben die Aussage bewiesen.

3 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Wie in der Einführung erwähnt, löst man partielle DGL's stets auf dieselbe Art. Man führt sie mit Tricks und Kniffen auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurück und versucht im Anschluss diese zu lösen. Daher ist die Fähigkeit gewöhnliche DGL's schnell und souverän lösen zu können essentiell für diesen Kurs. Und genau darauf zielt dieses Kapitel ab. Wir stellen hier die wichtigsten gewöhnlichen Differentiagleichungen vor und zeigen adequate Lösungsmethoden.

3.1 Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Differentialgleichungen der Form

$$a_1 f(x) + a_2 f^{'}(x) + a_3 f^{''}(x) + \ldots + a_n f^{(n)}(x) = 0 \quad a_1, \ldots a_n \in \mathbb{C},$$

heißen homogene lineare Differentiagleichungen vom Grad n (der Grad gibt die höchste vorkommende Ableitung an). Die auftauchenden Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n$ sind allesamt Konstanten, was sich in der Namensgebung wiederspiegelt. Eine solche Gleichung kann man mit dem Exponentialansatz auf eine gewöhnliche Gleichung zurückführen.

$$\begin{aligned} \text{Ansatz: } f(x) &= Ce^{\lambda x} : \\ f^{'}(x) &= \lambda C e^{\lambda x} \\ f^{''}(x) &= \lambda^2 C e^{\lambda x}, \ldots \end{aligned}$$

Mit diesem Ansatz kann man die obige DGL auf eine gewöhnliche algebraische Gleichung n-ten Grades zurückführen:

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 f(x) + a_2 f^{'}(x) + a_3 f^{''}(x) + \ldots + a_n f^{(n)}(x) \\ &= a_1 C\mathrm{e}^{\lambda x} + a_2 \lambda C\mathrm{e}^{\lambda x} + a_3 \lambda^2 C\mathrm{e}^{\lambda x} + \ldots + a_n \lambda^n C\mathrm{e}^{\lambda x} \\ &= C\mathrm{e}^{\lambda x}\left(a_1 + a_2\lambda + a_3\lambda^2 + \ldots + a_n\lambda^n\right). \end{aligned}$$

Eine solche Gleichung hat n Lösungen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Sofern λ_i keine doppelte Nullstelle ist, entspricht es einer Ansatzfunktion $C_i\mathrm{e}^{\lambda_i x}$, die die DGL löst. Die allgemeine Lösung der (linearen) DGL ist also durch eine beliebige Linearkombination aller Ansatzfunktionen gegeben:

$$\text{Lösung (ohne doppelte NST): } f(x) = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + \ldots + C_n\mathrm{e}^{\lambda_n x}.$$

Spezialfall (*doppelte Nullstelle*): Es kann vorkommen, dass die resultierende algebraische Gleichung eine doppelte Lösung (doppelte Nullstelle) $\tilde{\lambda}$ hat. Die allgemeinste zugehörige Ansatzwellenfunktion ist dann nicht (!!!) durch $\tilde{C}\mathrm{e}^{\tilde{\lambda}x}$ gegeben, sondern durch $(A + Bx)\,\mathrm{e}^{\tilde{\lambda}x}$. Die allgemeine Lösung ist dann wieder eine Linearkombination aller möglichen Lösungen:

$$\text{Lösung (mit doppelter NST): } f(x) = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + \ldots + C_{n-2}\mathrm{e}^{\lambda_{n-2} x} + (A + Bx)\,\mathrm{e}^{\tilde{\lambda}x}.$$

Bemerkung: Im Prinzip können mehrere doppelte, oder sogar dreifache (und vierfache, etc.) Nullstellen auftreten. Allerdings löst man in der Praxis meistens DGL's von maximal zweiter Ordnung. Und da eine algebraische Gleichung zweiter Ordnung entweder zwei einfache, oder eine doppelte Nullstelle hat, kommen diese Situationen praktisch nicht vor.

Diese theoretische Herangehensweise wollen wir nun an zwei Beispielen verdeutlichen.

3.1.1 Beispiel 1

$$y^{''} + 4y^{'} + 5y = 0$$

Verwendet man den Ansatz $y(x) = C\mathrm{e}^{\lambda x}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ ($y^{'}(x) = \lambda C\mathrm{e}^{\lambda x}$ und $y^{''} = \lambda^2 C\mathrm{e}^{\lambda x}$) , so ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 &= y^{''} + 5y^{'} + 4b \\ &= \lambda^2 C\mathrm{e}^{\lambda x} + 4\lambda C\mathrm{e}^{\lambda x} + 5C\mathrm{e}^{\lambda x} \\ &= \left(\lambda^2 + 4\lambda + 5\right) C\mathrm{e}^{\lambda x} \\ &\Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0. \end{aligned}$$

Das ist eine einfache quadratische Gleichung mit der sich λ bestimmen lässt:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm i.$$

Wir haben es also mit zwei einfachen Nullstellen zu tun. Die Lösung der Differentialglgeichung besteht aus Linearkombinationen der Ansatzfunktionen:

$$y(x) = A\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + B\mathrm{e}^{\lambda_2 x}.$$

A und B sind komplexe Konstanten, die durch etwaige Anfangsbedingungen festgelegt werden.

3.1.2 Beispiel 2

$$16y^{''} + 40y^{'} + 25y = 0$$

Der Ansatz $y(x) = Ce^{\lambda x}$ führt auf das charakteristische Polynom:

$$16\lambda^2 + 40\lambda + 25 = 0 \Longrightarrow \lambda^2 + \frac{5}{2}\lambda + \frac{25}{16} = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat folgende Lösung:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{25}{16}} = -\frac{5}{4}.$$

Dies ist nun eine einzige doppelte Nullstelle. Der zugehörige Ansatzterm ist daher durch $y(x) = (A + Bx)\, e^{\lambda x}$ gegeben. Da es aber keine weiteren Nullstellen gibt, ist das auch schon die allgemeinste Linearkombination aller möglichen Lösungen (es gibt ja nur diese eine). Somit haben wir die allgemeine Lösung gefunden:

$$y(x) = (A + Bx)\, e^{-\frac{5}{4}x}.$$

3.2 Inhomogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Inhomogene lineare DGL's ähneln homogenen linearen DGL's, haben aber einen Störterm auf der rechten Seite:

$$a_1 y(x) + a_2 y^{'}(x) + a_3 y^{''}(x) + \ldots + a_n y^{(n)}(x) = g(x),$$

wobei $a_1, \ldots a_n \in \mathbb{C}$ wieder Konstanten sind und $g(x)$ eine beliebige "Störfunktion" darstellt. Solche DGL's lassen sich mithilfe des folgenden Satzes lösen.

3.2.1 Satz (*homogene und partikuläre Lösung einer DGL*)

Die Lösung einer inhomogenen linearen DGL entspricht der Summe aus homogener Lösung $y_h(x)$ und partikulärer Lösung $y_p(x)$, wobei gilt:

- Die homogene Lösung $y_h(x)$ ist die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL:

$$a_1 y_h(x) + a_2 y_h^{'}(x) + a_3 y_h^{''}(x) + \ldots + a_n y_h^{(n)}(x) = 0. \tag{2}$$

- Die partikuläre Lösung $y_p(x)$ ist irgendeine spezielle Lösung der DGL:

$$a_1 y_p(x) + a_2 y_p^{'}(x) + a_3 y_p^{''}(x) + \ldots + a_n y_p^{(n)}(x) = g(x). \tag{3}$$

Man findet sie am besten durch einen Ansatz von der Art des Störterms $g(x)$.

Beweis: Es genügt die Linearität der DGL auszunützen. Mit $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ gilt:

$$\begin{aligned}
& a_1 y(x) + a_2 y^{'}(x) + \ldots + a_n y^{(n)}(x) \\
= \; & a_1 (y_h(x) + y_p(x)) + a_2 \left(y_h^{'}(x) + y_p^{'}(x) \right) + \ldots + a_n \left(y_h^{(n)}(x) + y_p^{(n)}(x) \right) \\
= \; & \left\{ a_1 y_h(x) + a_2 y_h^{'}(x) + \ldots + a_n y_h^{(n)}(x) \right\} + \left\{ a_1 y_p(x) + a_2 y_p^{'}(x) + \ldots + a_n y_p^{(n)}(x) \right\} \\
= \; & 0 + g(x) = g(x).
\end{aligned}$$

Die Allgemeinheit der homogenen Lösung impliziert, dass wir tatsächlich die allgemeinst mögliche Lösung gefunden haben. □

Wie dieser Satz zu verwenden ist werden wir nun anhand von einigen Beispielen erläutern.

3.2.2 Beispiel 1

$$y^{''} + 2y^{'} + 5y = 3x^2$$

Gemäß dem Satz ist das homogene Problem durch folgende DGL gegeben:

$$y_h^{''} + 2y_h^{'} + 5y_h = 0.$$

Diese Gleichung können wir problemlos mit dem Standardansatz $y_h = C\mathrm{e}^{\lambda x}$ lösen:

$$0 = y_h^{''} + 2y_h^{'} + 5y_h \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$$

Und somit:

$$y_h(x) = e^{-x} \left(\tilde{A}\mathrm{e}^{2ix} + \tilde{B}\mathrm{e}^{-2ix} \right) = e^{-x} \left\{ A \sin(2x) + B \cos(2x) \right\}.$$

Hier haben wir eine der Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion benützt. Die Konstanten sind ohnehin beliebig und deshalb können wir $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ einfach durch A und B ersetzen. Nun müssen wir noch die partikuläre Lösung finden. Wir "probieren" den folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= Ax^2 + Bx + C \\
y_p^{'}(x) &= 2Ax + B \\
y_p^{''}(x) &= 2A
\end{aligned}$$

Der Ansatz sollte ja immer von der Art des Störterms sein (und der ist hier ein Polynom zweiten Grades). Einsetzen in die DGL $y_p^{''}+2y_p^{'}+5y_p=3x^2$ liefert:

$$\begin{aligned} y_p^{''}+2y_p^{'}+5y_p &= 2A+2\{2Ax+B\}+5\left\{Ax^2+Bx+C\right\} \\ &= 2A+4Ax+2B+5Ax^2+5Bx+5C \\ &= 5Ax^2+\{4A+5B\}x+\{2A+2B+5C\} \stackrel{!}{=} 3x^2. \end{aligned}$$

Damit folgen folgende Bedingungen für A, B und C:

$$\begin{aligned} 5A &= 3 \Rightarrow A=\frac{3}{5} \\ 4A+5B &= 0 \Rightarrow B=-\frac{4}{5}A=-\frac{4}{5}\frac{3}{5}=-\frac{12}{5^2} \\ 2A+2B+5C &= 0 \Rightarrow C=-\frac{2}{5}(A+B)=-\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\frac{3}{5}\right)=-\frac{2}{5}\frac{3}{5}\frac{1}{5}=-\frac{6}{5^3}, \end{aligned}$$

und somit:

$$y_p(x)=\frac{3}{5}x^2-\frac{12}{5^2}x-\frac{6}{5^3}.$$

Gemäß dem Satz gilt für die Gesamtlösung der Differentialgleichung $y=y_h+y_p$:

$$y(x)=e^{-x}\{A\sin(2x)+B\cos(x)\}+\frac{3}{5}x^2-\frac{12}{5^2}x-\frac{6}{5^3}.$$

3.2.3 Beispiel 2

$$y^{''}(x)+2y^{'}(x)+5y(x)=\cos(x)$$

Das homogene Problem ist identisch zu dem in Beispiel 3. Somit haben wir erneut:

$$y_h(x)=e^{-x}\{A\sin(2x)+B\cos(x)\}.$$

Nun fehlt uns noch die partikuläre Lösung. Wir "probieren" folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= A\cos(x)+B\sin(x) \\ y_p^{'}(x) &= -A\sin(x)+B\cos(x) \\ y_p^{''}(x) &= -A\cos(x)-B\sin(x). \end{aligned}$$

Das ist ein Ansatz von der Art des Störterms. Setzen wir diesen Ansatz in die Gleichung ein, so folgt für $y_p^{''}+2y_p^{'}+5y_p=\cos(x)$:

$$\begin{aligned} y_p^{''}+2y_p^{'}+5y_p &= \{-A\cos(x)-B\sin(x)\}+2\{-A\sin(x)+B\cos(x)\} \\ &+ 5\{A\cos(x)+B\sin(x)\} \\ &= \{-A+2B+5A\}\cos(x)+\{-B-2A+5B\}\sin(x) \end{aligned}$$

Vergleicht man das mit der rechten Seite der Gleichung, so muss gelten:

$$\{-A+2B+5A\}\cos(x)+\{-B-2A+5B\}\sin(x)=\cos(x)$$

Und daraus folgt folgendes Gleichungssystem für A und B:

$$\begin{aligned} 4A + 2B &= 1 \\ 4B - 2A &= 0 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für die Koeffizienten $A = \frac{1}{5}$ und $B = \frac{1}{10}$. Dies führt zu unserer partikulären Lösung:

$$y_p = \frac{1}{5}\cos(x) + \frac{1}{10}\sin(x)$$

Gemäß dem Satz gilt für die Gesamtlösung der Differentialgleichung $y = y_h + y_p$:

$$y = e^{-x}\left\{A\sin(2x) + B\cos(x)\right\} + \frac{1}{5}\cos(x) + \frac{1}{10}\sin(x)\,.$$

3.3 Lineare Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten

Auch für lineare DGL's ohne konstanten Koeffizienten gibt es ein Kochrezept: Variation der Konstanten. Dieses Verfahren ist technisch anspruchsvoller als die bisherigen. Da es im Rahmen der Vorlesung allerdings nie verwendet wurde, verzichten wir auf eine Einführung dieser allgemeinen Technik. Stattdessen untersuchen wir einen wichtigen Spezialfall anhand eines Beispiels:

3.3.1 Beispiel

$$y^{'} = x^2 y$$

Hier kann man die Gleichung "sortieren" (y auf die eine Seite und x auf die andere) indem man durch y dividiert:

$$y^{'} = x^2 y \;\Rightarrow\; \frac{y^{'}}{y} = x^2.$$

Nun kann man die Gleichung unbestimmt über x integrieren. Das Gleichheitszeichen bleibt dabei erhalten:

$$\frac{y^{'}}{y} = x^2 \;\Rightarrow\; \int \frac{y^{'}}{y}\mathrm{d}x = \int x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + c,$$

wobei c die Integrationskonstante bezeichnet. Um $\int \frac{y^{'}}{y}\mathrm{d}x$ zu berechnen benützt man folgenden Trick:

$$y^{'}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \text{ " = " } \mathrm{d}y,$$

und somit

$$\int \frac{y^{'}}{y}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{y}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right) = \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \log(y)\,.$$

Also ergibt sich:

$$\frac{y'}{y} = x \;\Rightarrow\; \int \frac{y'}{y}\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; \log(y) = \frac{1}{3}x^3 + c.$$

Durch exponentieren erhalten wir daraus:

$$y = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3+c} = \overbrace{\mathrm{e}^c}^{A}\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3} = A\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3},$$

wobei A eine multiplikative Konstante ist, welche durch etwaige Randbedingungen bestimmt werden kann.

3.4 Nichtlineare Differentialgleichungen

Bei inhomogenen Differentialgleichungen funktionieren unsere bisherigen Lösungsansätze nicht. Tatsächlich gibt es auch kein allgemeines Kochrezept. Manchmal kann man solche Gleichungen allerdings durch einen Trick in Differentialgleichungen überführen, die wir dann mit den obigen Methoden lösen können. Dieser Trick heißt Substitution und wir erläutern ihn in einem Beispiel.

3.4.1 Beispiel

$$y' = (y-x)^2 + 1$$

Bei der Substitution definieren wir eine neue Funktion $u(x)$ auf "clevere" Art und Weise:

$$u(x) := y - x \;\Rightarrow\; u' = y' - 1 \;\Rightarrow\; y' = u' + 1.$$

Wir ersetzen in der Gleichung $y-x$ durch u und y' durch $u'+1$, under erhalten so eine Differentialgleichung für u:

$$u' + 1 \;=\; (u)^2 + 1 \;\Rightarrow\; u' = u^2 \;\Rightarrow\; \frac{u'}{u^2} = 1.$$

Und diese Differentialgleichung lässt sich durch einen Seperationsansatz (vgl. Beispiel 5) lösen:

$$\frac{u'}{u^2} \;=\; 1 \;\Rightarrow\; \int \frac{u'}{u^2}\mathrm{d}x = \int 1\mathrm{d}x.$$

Analog zu dort gilt nämlich:

$$u'\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \text{ "} = \text{" } \mathrm{d}u,$$

und somit:

$$\int \frac{u'}{u^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\frac{1}{u} + c_1.$$

Hier ist $c_1$die Integrationskonstante. Für die rechte Seite ergibt sich sofort:

$$\int 1 \mathrm{d}x = x + c_2,$$

wobei c_2 eine weitere Integrationskonstante darstellt. Fasst man die Konstanten als

$$c := c_2 - c_1,$$

zusammen, erhält man:

$$-\frac{1}{u} = x + c \;\Rightarrow\; u = -\frac{1}{x+c}$$

Daraus lässt sich über $u = y - x \quad \Rightarrow \quad y = u + x$ die eigentliche Lösung y ermitteln:

$$y = u + x = x - \frac{1}{x+c}.$$

4 Die eindimensionale Wellengleichung

Die Wellengleichung ist eine typische partielle Differentialgleichung. Sie taucht in vielen Bereichen der Naturwissenschaften auf und ist daher sehr wichtig. Beispiele für ihre Anwendung sind:

- Die Maxwellschen Gleichungen im Vakuum: Elektromagnetische Wellen (Licht).
- Das Propagieren von Dichtefluktuationen in einem Medium: Schallwellen.
- Das Schwingen einer Saite: Musiktheorie.

In diesem Kapitel betrachten wir die Wellengleichung in einer Dimension. Diese hat stets folgende Form:

$$\begin{aligned} \Box u(x,t) &= F(x,t) \qquad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) &= f(x) \qquad x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) &= g(x) \qquad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{4}$$

wobei $\Box$ den D'Alembert-Operator bezeichnet:

$$\Box f(x,t) := \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} f(x,t) = f_{tt}(x,t) - c^2 f_{xx}(x,t).$$

c steht hier für die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle (e.g.: Lichtgeschwindigkeit für EM Wellen, oder Schallgeschweindigkeit für Schallwellen). In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Lösung dieser Gleichung

4.1 Die homogene Wellengleichung

Die homogene Wellengleichung ist ein Spezialfall von (4):

$$\begin{aligned} \Box u(x,t) &= 0 \qquad (5)\\ u(x,0) &= f(x)\\ u_t(x,0) &= g(x), \end{aligned}$$

wobei die Geltungsbereiche von Ort und Zeit erneut $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$ sind. Für dieses Problem gibt es eine praktische Lösungsformel, nämlich die Formel von d'Alembert.

4.1.1 Theorem (*die Formel von d'Alembert*):

Die Lösung der homogenen Wellengleichung (5) ist durch folgende Funktion gegeben:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\{f(x+ct) + f(x-ct)\} + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,\mathrm{d}s. \qquad (6)$$

Beweis: Die folgende kleine Rechnung impliziert, dass jede "brave" Funktion der Form $h(x \pm ct)$ die homogene Wellengleichung erfüllt:

$$\begin{aligned} \Box h(x \pm ct) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} h(x \pm ct) - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} h(x \pm ct) = (\pm c)\frac{\partial}{\partial t} h'(x \pm ct) - c^2 \frac{\partial}{\partial x} h'(x \pm ct)\\ &= (\pm c)^2 h''(x \pm ct) - c^2 h''(x \pm ct) = \left(c^2 - c^2\right) h''(x \pm ct) = 0. \end{aligned}$$

Es sei nun $G(s)$ die Stammfunktion von $g(s)$ (d.h.: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}G(s) = G'(s) = g(s)$). Dann gilt:

$$\frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2c}G(x+ct) - \frac{1}{2c}G(x-ct),$$

und die Formel von D'Alembert entspricht somit:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\{f(x+ct) + f(x-ct)\} + \frac{1}{2c}G(x+ct) - \frac{1}{2c}G(x-ct).$$

Somit besteht $u(x,t)$ in Wahrheit aus der Linearkombinationen von Funktionen der Form $h(x \pm ct)$. Gemäß unserer kleinen Rechnung löst jede dieser Funktionen die homogene Wellengleichung. Aufgrund der Linearität der Wellengleichung ist auch die obige Linearkombination eine Lösung derselben. Es bleibt noch zu zeigen, dass die Randbedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \frac{1}{2}\{f(x) + f(x)\} + \frac{1}{2c}G(x) - \frac{1}{2c}G(x) = f(x)\\ u_t(x,0) &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\{f(x+ct) - f(x-ct)\}|_{t=0} + \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2c}G(x+ct) - \frac{1}{2c}G(x-ct)\right\}|_{t=0}\\ &= \frac{1}{2}\left\{f'(x) - f'(x)\right\} + \frac{1}{2c}\left\{cG'(x) + cG'(x)\right\} = G'(x) = g(x). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt aus der Definition von $G(s)$. Somit sind auch die Randbedingungen erfüllt. Eigentlich bleibt jetzt noch zu zeigen, dass diese Lösung wirklich die allgemeinst mögliche Lösung ist. Auf diese Argumentation verzichten wir hier jedoch. $\square$

4.1.2 Beispiel

Man betrachte die homogene Wellengleichung für $c = 10$ mit folgenden Randbedingungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} 1 & \text{für} - 2 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ g(x) &= \begin{cases} 10 & \text{für} - 2 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Gesucht sind die Form der Lösung und eine obere Schranke für ihren Maximalwert. Die Schwierigkeit liegt hier im Berechnen des Integrals $\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,\mathrm{d}s$. Eine graphisch unterstützte Integration liefert folgende Stammfunktion:

$$G(x) = \begin{cases} -20 & \text{für } x < -2 \\ 10x & \text{für} - 2 \leq x \leq 2 \\ 20 & \text{für } x > 2. \end{cases}$$

Mit der Formel von D'Alembert bekommen wir die Lösung unserer Wellengleichung:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\{f(x+ct) + f(x-ct)\} + \frac{1}{20}\{G(x+ct) - G(x-ct)\},$$

da $c = 10$. Um eine obere Schranke für den Maximalwert zu erhalten, machen wir folgende grobe Abschätzung:

$$u(x,t) \leq \frac{1}{2}\{|f(x+ct)| + |f(x-ct)|\} + \frac{1}{20}\{|G(x+ct)| + |G(x-ct)|\}.$$

Aus der Form der Funktionen können wir sofort

$$|f(x)| \leq 1 \qquad \forall x,$$

und

$$|G(x)| \leq 20 \qquad \forall x,$$

ablesen. Somit erhalten wir folgende Abschätzung:

$$u(x,t) \leq \frac{1}{2}\{1+1\} + \frac{1}{20}\{20+20\} = 1 + 2 = 3,$$

und wir können uns sicher sein, dass $u(x,t) \leq 2\ \forall x \in \mathbb{R}$ und $\forall t > 0$ gilt.

4.2 Die inhomogene Wellengleichung

Der allgemeine Fall der Wellengleichung (4) ist durch die inhomogene Wellengleichung gegeben:

$$\begin{aligned} \Box u(x,t) &= F(x,t) \qquad x\in\mathbb{R}, t>0 \\ u(x,0) &= f(x) \qquad x\in\mathbb{R} \\ u_t(x,0) &= g(x) \qquad x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Es gibt zwei verschiedene Herangehensweisen an diese DGL, welche wir nun vorstellen.

4.2.1 Die verallgemeinerte Formel von d'Alembert

Folgende Verallgemeinerung der Formel von d'Alembert gilt für die obige inhomogene Wellengleichung:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\{f(x+ct)+f(x-ct)\}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,\mathrm{d}s+\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau. \tag{7}$$

Diese Formel unterscheidet sich nur durch den letzten Term von (6). Dieser rührt von der Tatsache her, dass die Inhomogenität $F(x,t)$ nun mitberücksichtigt werden muss. Dies geschicht durch eine Integration über das "charakteristische Dreieck". Dieses Dreieck hängt eng mit der Forderung nach Kausalität zusammen. Wir wollen hier allerdings nicht näher auf diesen interessanten Zusammenhang eingehen und verzichten auf einen Beweis von (7).
Verwendet man (7) zum Lösen der inhomogenen Wellengleichung, so besteht der schwierigste Schritt zweifellos im Berechnen des letzten Integrals. Er ist rechnerisch aufwendig und wir stellen daher noch eine alternative Herangehensweise vor.

4.2.2 Überführen inhomogener Wellengleichungen in Homogene

Wenn die Inhomogenität (der Störterm) von relativ einfacher Gestalt ist, kann man oft eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung "erraten". Gelingt einem dies, so lässt sich die inhomogene Wellengleichung in eine Homogene überführen. Diese homogene DGL lässt sich dann relativ einfach mit Formel (6) lösen.
Die folgenden zwei Beispiele sollen die beiden vorgestellten Methoden veranschaulichen.

4.2.3 Beispiel zur Formel von d'Alembert

Wir berechnen den letzten Term in (7) für

$$\Box u(x,t) = x.$$

Hier müssen wir also $\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$ explizit für $F(\xi,\tau)=\xi$ berechnen:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2c}\int\limits_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau &= \frac{1}{2c}\int\limits_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} \xi\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2c}\int\limits_0^t\left\{\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} \xi\mathrm{d}\xi\right\}\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2c}\int\limits_0^t\left\{\frac{1}{2}\left[x+c(t-\tau)\right]^2-\frac{1}{2}\left[x-c(t-\tau)\right]^2\right\}\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{4c}\int\limits_0^t\left\{x^2+2xc(t-\tau)+c^2(t-\tau)^2-\left[x^2-2x(t-\tau)+c^2(t-\tau)^2\right]\right\}\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{4c}\int\limits_0^t 4xc(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= x\int\limits_0^t (t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= x\left(-\frac{1}{2}(t-\tau)^2\,|_{\tau=0}^{\tau=t}\right)=\frac{1}{2}xt^2.
\end{aligned}
$$

Somit besteht der gesuchte Beitrag gerade aus $\frac{1}{2}xt^2$. Die restliche Arbeit - nämlich das Berechnen der ersten Beiträge in (7) - ist komplett analog zur Lösung der homogenen Wellengleichung und wir wollen uns hier nicht mehr damit befassen.

4.2.4 Beispiel zur alternativen Vorgehensweise

Wir lösen folgende Wellengleichung durch Zurückführen auf eine homogene DGL:

$$
\begin{aligned}
\Box w(x,t) &= xt \qquad c=1 \\
w(x,0) &= x^3 \\
w_t(x,0) &= \cos(x).
\end{aligned}
$$

Beachte, dass hier gilt:

$$\Box=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

da $c=1$. Wir benützen jetzt die Tatsache, dass man dieses inhomogene Problem - ähnlich wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen - in ein homogenes und ein partikuläres Problem aufspalten können:

$$w(x,t) = w_h(x,t) + w_p(x,t).$$

Mit etwas Erfahrung und Glück kann man die partikuläre Lösung anhand des Störterms erraten. Ein "educated guess" für dieses Problem ist zum Beispiel:

$$w_p(x,t) = \frac{1}{6}xt^3,$$

denn dieser erfüllt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2} w_p(x,t) &= xt \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_p(x,t) &= 0.\end{aligned}$$

Und deshalb gilt:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) w_p(x,t) = xt.$$

Wir haben also unsere partikuläre Lösung bereits gefunden. Nun können wir uns dem homogenen Problem widmen. Die Aufspaltung $w(x,t) = w_h(x,t) + w_p(x,t)$ hat im Allgemeinen auch Auswirkungen auf die Randbedingungen. Dem müssen wir unbedingt Beachtung schenken:

$$\begin{aligned}w(x,0) &= w_h(x,0) + w_p(x,0) \Longrightarrow w_h(x,0) = w(x,0) - w_p(x,0) \\ w_t(x,0) &= \frac{\partial}{\partial t} w_h(x,0) + \frac{\partial}{\partial t} w_p(x,0) \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} w_h(x,0) = \frac{\partial}{\partial t} w(x,0) - \frac{\partial}{\partial t} w_p(x,0).\end{aligned}$$

Uns verbleibt also folgendes homogenes Problem:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) w_h(x,t) &= 0 \\ w_h(x,0) &= w(x,0) - w_p(x,0) \\ \frac{\partial}{\partial t} w_h(x,0) &= \frac{\partial}{\partial t} w(x,0) - \frac{\partial}{\partial t} w_p(x,0).\end{aligned}$$

Für unser partikuläre Lösung bedeutet das konkret:

$$\begin{aligned}\Box w_h(x,t) &= 0 \\ w_h(x,0) &= w(x,0) - w_p(x,0) = x^3 - \frac{1}{6}xt^3 \,|_{t=0} = x^3 - 0 = x^3 \\ \frac{\partial}{\partial t} w_h(x,0) &= \frac{\partial}{\partial t} w(x,0) - \frac{\partial}{\partial t} w_p(x,0) = \cos(x) - \frac{1}{2}xt^2 \,|_{t=0} = \cos(x).\end{aligned}$$

Dieses Problem können wir nun mit der Formel von d'Alembert für homogene Differentialgleichungen (vergleiche Kapitel 4.1) lösen (man beachte, dass noch immer $c = 1$ gilt):

$$\begin{aligned} w_h(x,t) &= \frac{1}{2}\left\{(x+t)^3 + (x-t)^3\right\} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \cos(s)\,ds \\ &= \frac{1}{2}\left\{(x+t)^3 + (x-t)^3\right\} + \frac{1}{2}\left\{\sin(x+t) - \sin(x-t)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{(x+t)^3 + (x-t)^3 + \sin(x+t) - \sin(x-t)\right\}. \end{aligned}$$

Und daraus lässt sich nun die allgemeine Lösung $w(x,t)$ der inhomogenen Wellengleichung bestimmen:

$$w(x,t) = w_h(x,t) + w_p(x,t) = \frac{1}{2}\left\{(x+t)^3 + (x-t)^3 + \sin(x+t) - \sin(x-t)\right\} + \frac{1}{6}xt^3.$$

4.2.5 Bemerkung

Die inhomogene d'Alembert-Formel (7) liefert ein Kochrezept zum Lösen von jeder ("sinnvollen") inhomogenen Wellengleichung. Allerdings ist sie rechnerisch etwas aufwendig. Versucht man die betreffende inhomogene Wellengleichung auf eine Homogene zurückzuführen, so muss man eine partikuläre Lösung finden. Dafür gibt es kein Kochrezept und man muss sich auf mathematische Intuition verlassen. Gelingt es einem jedoch eine partikuläre Lösung zu erraten, so ist man mit dieser Methode deutlich schneller.

4.3 Versteckte Wellengleichungen

Im vorigen Abschnitt haben wir gelernt, wie wir inhomogene Wellengleichungen - also Differentialgleichungen vom Typ (4) - lösen können. Dieses Wissen kann aber unter Umständen auch auf andere Differentialgleichungen angewendet werden: nämlich auf DGL's, die sich durch einen Trick in eine Wellengleichung überführen lassen. Ein solcher Fall wird im folgenden Beispiel behandelt.

4.3.1 Beispiel

Wir lösen folgende Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} u_{ttt}(x,t) - u_{xxt} &= xt \\ u_t(x,0) &= x^3 \\ u_{tt}(x,0) &= \cos(x). \end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung ist offensichtlich keine Wellengleichung. Allerdings können wir sie durch eine clevere Substitution in eine überführen. Offensichtlich gilt nämlich:

$$
\begin{aligned}
u_{ttt}(x,t) - u_{xxt} &= \left(\frac{\partial^3}{\partial t^3} - \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t}\right) u(x,t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left\{\frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\right\} = xt \\
u_t(x,0) &= \left\{\frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\right\} = x^3 \\
u_{tt}(x,0) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\right\}.
\end{aligned}
$$

Führt man also folgende Definition ein:

$$
w(x,t) := \frac{\partial}{\partial t} u(x,t), \tag{8}
$$

so erhält man eine typische inhomogene Wellengleichung für $w(x,t)$ mit $c = 1$ ($\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$):

$$
\begin{aligned}
\Box w(x,t) &= xt \\
w(x,0) &= x^3 \\
w_t(x,0) &= \cos(x).
\end{aligned}
$$

Nun ist das aber genau die Wellengleichung, die wir in Abschnitt 4.2.4 bereits gelöst haben. Als Lösung erhielten wir:

$$
w(x,t) = \frac{1}{2}\left\{(x+t)^3 + (x-t)^3 + \sin(x+t) - \sin(x-t)\right\} + \frac{1}{6} x t^3.
$$

Mithilfe von (8) können wir aus dieser Lösung auch die Lösung unserer DGL ermitteln. Hierfür müssen wir lediglich über t integrieren:

$$
u(x,t) = \int w(x,t)\,\mathrm{d}t + f(x). \tag{9}
$$

$f(x)$ steht hier für eine beliebige von x abhängige Funktion. Da $\frac{\partial}{\partial t} f(x) = 0$ ($f(x)$ ist ja unabhängig von t), entspricht diese Funktion der Integrationskonstante bei eindimensionalen Integralen. Formel (9) liefert wirklich die Lösung, da:

$$
\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\int w(x,t)\,\mathrm{d}t + f(x)\right\} = \frac{\partial}{\partial t}\int w(x,t)\,dt + \overbrace{\frac{\partial}{\partial t} f(x)}^{0} = w(x,t),
$$

wobei $\frac{\partial}{\partial t}\int w(x,t)\,\mathrm{d}t = w(x,t)$ (Hauptsatz der Analysis) verwendet wurde. In unserem Fall gilt somit für die gesuchte Funktion $u(x,t)$:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \int w(x,t)\,\mathrm{d}t + f(x) \\
&= \int \left[\frac{1}{2}\left\{(x+t)^3 + (x-t)^3 + \sin(x+t) - \sin(x-t)\right\} + \frac{1}{6} x t^3\right] \mathrm{d}t + f(x) \\
&= \frac{1}{8}\left\{(x+t)^4 - (x-t)^4\right\} - \frac{1}{2}\left\{\cos(x+t) + \cos(x-t)\right\} + \frac{1}{24} x t^4 + f(x).
\end{aligned}
$$

Die Lösung für unsere DGL lautet somit:

$$u(x,t) = \frac{1}{8}\left\{(x+t)^4 - (x-t)^4\right\} - \frac{1}{2}\left\{\cos(x+t) + \cos(x-t)\right\} + \frac{1}{24}xt^4 + f(x)\,.$$

5 Die Methode der Variablenseparation

5.1 Einführendes Beispiel: Die Wärmeleitungsgleichung

In diesem Kapitel stellen wir eine der wichtigsten Methoden zum Lösen partieller Differentialgleichungen vor: Die Methode der Variablenseparation. Anstatt sie formal einzuführen, erklären wir sie gleich anhand eines wichtigen Beispiels - nämlich der Wärmeleitungsgleichung: Betrachte folgende DGL auf dem endlichen Intervall $[0, L]$:

$$\begin{aligned} u_t - ku_{xx} &= 0 \qquad \forall x \in [0, L]\,, \forall t > 0 && (10) \\ u(0,t) &= u(L,t) = 0 \qquad \forall t > 0 && (11) \\ u(x,0) &= 7\sin(3\pi x)\,, && (12) \end{aligned}$$

Wir beobachten nun, dass in der eigentlichen Differentialgleichung entweder nur t- oder nur x-Ableitungen auftauchen, keine gemischten Ableitungen (u_{xt} wäre zum Beispiel eine gemischte Ableitung)! Eine derartige Differentialgleichung nennt man separabel[1]. Für separable Differentialgleichungen kann man folgenden (Produkt-) Ansatz verwenden:

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)\,. \qquad (13)$$

Setzen wir diesen Ansatz in (10) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 &= u_t - ku_{xx} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{X(x)\,T(t)\right\} - k\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{X(x)\,T(t)\right\} \\ &= X(x)\frac{\partial}{\partial t}T(t) - kT(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x)\,. \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck können wir nun durch $kX(x)\,T(t)$ dividieren:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{kT(t)}\frac{\partial}{\partial t}T(t) - \frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x) \\ \text{oder:} \qquad & \frac{1}{kT(t)}\frac{\partial}{\partial t}T(t) = \frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x)\,. && (14) \end{aligned}$$

Und jetzt kommt der Trick. In (14) haben wir die ursprüngliche DGl (10) separiert[2] :

- Links stehen nur Ausdrücke, die auschließlich von t abhängen.

[1] Diese Separabilität bezeichnet übrigens derselbe einen Umstand, den ihr schon gut aus der Quantenmechanik kennt. Dort hat man es häufig mit separablen Hamiltonians zu tun.
[2] Daher rührt auch der Name der Methode.

- Rechts stehen nur Ausdrücke, die ausschließlich von x abhängen.

Die Gleichheit muss jedoch für beliebige $x \in [0, L]$ und $t > 0$ gelten! Dies ist aber nur möglich, wenn beide Seiten konstant sind. In diesem Fall können wir schreiben:

$$\frac{1}{kT(t)}\frac{\partial}{\partial t}T(t) = -\omega^2 = \frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x),$$

wobei $-\omega^2$die (herbeiargumentierte) Separationskonstante[3] darstellt. Ihre möglichen Werte werden durch die Randbedingung (11) eingeschränkt, doch dazu kommen wir später. Mit diesem Trick ist es uns nun gelungen die partielle DGL (10) in zwei gewöhnliche DGL's zu zerlegen:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x) = -\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x) = -\omega^2 X(x) \tag{15}$$

$$\frac{1}{kT(t)}\frac{\partial}{\partial t}T(t) = -\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}T(t) = -k\omega^2 T(t). \tag{16}$$

Auch die Randbedingung (11) lässt sich separieren:

$$u(0,t) \quad = \quad u(L,t) = 0 \Rightarrow X(0)\,T(t) = X(L)\,T(t) = 0 \quad \forall t > 0,$$

was auf folgende Randbedingung führt:

$$X(0) = X(L) = 0. \tag{17}$$

Ähnliches können wir mit Randbedingung (12) machen:

$$u(x,0) = 7\sin(3\pi x) \Rightarrow X(x)\,T(0) = 7\sin(3\pi x),$$

was folgende Randbedingung impliziert:

$$X(x) = \frac{1}{T(0)}7\sin(3\pi x). \tag{18}$$

Gleichung (15) zusammen mit der Randbedingung (17) ergibt nun eine lösbare gewöhnliche DGL (Da $X(x)$ nur von x abhängt sind gewöhnliche und partielle Ableitung identisch: $\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x}X(x) = X''(x)$):

$$\begin{aligned} X''(x) &= -\omega^2 X(x) \\ X(0) &= X(L) = 0. \end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung hat abhängig von dem Vorzeichen von $-\omega^2$ drei mögliche Lösungen:

[3]Die Wahl $-\omega^2$ ist erlaubt und wird uns später das Rechnen etwas erleichtern.

1. $+\omega^2 < 0$: Hier lautet die Lösung $X(x) = A\mathrm{e}^{\omega x} + B\mathrm{e}^{-\omega x}$. Die Randbedingung fordert hier allerdings:

$$\begin{aligned} X(0) &= 0 \Rightarrow A = -B \\ X(L) &= 0 \Rightarrow A\mathrm{e}^{\omega L} - A\mathrm{e}^{-\omega L} = 0 \Rightarrow A = 0. \end{aligned}$$

   Also sind wir hier auf die triviale Lösung $X(x) = 0$ gestoßen (da $A = B = 0$).

2. $+\omega^2 = 0$: Hier lautet die Lösung: $X(x) = A + Bx$. Die Randbedingung impliziert:

$$\begin{aligned} X(0) &= 0 \Rightarrow A = 0 \\ X(L) &= 0 \Rightarrow BL = 0 \Rightarrow B = 0, \end{aligned}$$

   und wir bekommen wieder die triviale Lösung $X(x) = 0$.

3. $+\omega^2 > 0$: Hier lautet die Lösung: $X(x) = \tilde{A}\mathrm{e}^{i\omega x} + \tilde{B}\mathrm{e}^{-i\omega x} = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$, wobei wir eine der Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion benützt haben. Hier impliziert die Randbedingung:

$$\begin{aligned} X(0) &= 0 \Rightarrow A = 0 \\ X(L) &= 0 \Rightarrow B\sin(\omega L) = 0. \end{aligned}$$

   Letztere Gleichung ist genau dann (nichttrivial) erfüllt, wenn $\omega = \frac{n\pi}{L}$ für $n \in \mathbb{N}$ beliebig gilt.

Wir sehen also, dass Gleichung (15) nur dann eine nichttriviale Lösung hat, wenn $\omega_n = \frac{n\pi}{L}$ für $n \in \mathbb{Z}$ beliebig[4]. Für ein fixes $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir also:

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Die Randbedingung (11) der Heat Equation hat uns also - via (17) - tatsächlich die möglichen Separationskonstanten eingeschränkt. Nun kommt eine weitere wichtige Beobachtung: Gemäß unserem Vorgehen sind die Separationskonstanten in (15) und (16) identisch. Damit erhalten wir aus (16):

$$\frac{\partial}{\partial t}T_n(t) = -k\omega_n^2 T(t) = -\frac{kn^2\pi^2}{L^2}T_n(t),$$

woraus wir sofort die zugehörige Lösung ablesen können:

$$T_n(t) = A_n \exp\left\{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t\right\}, \tag{19}$$

wobei A_n eine Konstante ist. Hier gibt es keine einschränkende Randbedingung. Wir können unsere Gesamtlösung daher zusammensetzen:

$$u_n(x,t) = C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\exp\left\{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t\right\} \qquad \text{für ein } n \in \mathbb{N}\text{beliebig},$$

[4] Der Index n signalisiert die Abhängigkeit dieser Größe von der Zahl n.

wobei wir eine neue Konstante $C_n := A_n B_n$ eingeführt haben. Tatsächlich haben wir nicht nur eine, sondern unendlich viele mögliche Lösungen gefunden (eine für jedes $n = 1, 2, 3 \ldots$). Das Superpositionsprinzip sagt uns nun, dass die allgemeine Lösung aus einer Linearkombination aller möglichen Lösungen besteht. In unserem Fall bedeutet dies:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \exp\left\{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t\right\}.$$

Allerdings sind die Konstanten C_n noch unbestimmt. Wir müssen sie aus einem Vergleich unserer Lösung mit der zweiten Randbedingung ermitteln. Setzen wir in unserer Lösung $t = 0$, so muss wegen (12) gelten:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \exp\left\{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t\right\}|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ u(x,0) &\overset{!}{=} 7\sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right). \end{aligned}$$

Daraus können wir durch einen Koeffizientenvergleich erkennen, dass $C_3 = 7$ und sonst $C_n = 0$ gelten muss. Unsere endgültige Lösung lautet daher:

$$u(x,t) = 7\sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right) \exp\left\{-\frac{9k\pi^2}{L^2}t\right\}.$$

5.2 Variablenseparation für inhomogene Randbedingungen

Die Methode der Variablenseparation ist sehr mächtig. Allerdings hängt sie entscheidend von der homogenen Randbedingung (11) ($u(0,t) = u(L,t) = 0 \ \forall t > 0$) ab. Diese Randbedingung ist allerdings nicht immer gewährleistet. Manchmal kann man jedoch inhomogene Randbedingungen auf homogene Randbedingungen zurückführen. Dieses Procedere wollen wir am nächsten Beispiel veranschaulichen:

$$\begin{aligned} u_t - ku_{xx} &= 0 \\ u(0,t) &= 4 \qquad \forall t > 0 \\ u(L,t) &= 12 \qquad \forall t > 0 \\ u(x,0) &= f(x) \qquad \forall x \in [0,L], \end{aligned}$$

wobei $f(x)$ eine beliebige L-periodische (d.h.: $f(x+L) = f(x)$) Funktion darstellt, auf die wir hier nicht näher eingehen wollen. Nun können wir diese Gleichung mit einem Trick in eine Gleichung mit homogenen Randbedingungen überführen. Der Trick besteht wieder einmal aus dem Aufspalten in eine homogene und partikuläre Lösung:

$$u(x,t) = u_h(x,t) + u_p(x,t).$$

Offenbar erfüllt folgender Ansatz die DGL:

$$u_p(x,t) := Ax + B,$$

da $\frac{\partial}{\partial t} u_p = 0$ und $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_p = 0$. Wir haben also eine partikuläre Lösung gefunden und können sie den Randbedingungen anpassen:

$$\begin{aligned} u_p(0,t) &= B \stackrel{!}{=} 4 \Rightarrow B = 4 \\ u_p(L,t) &= AL + B \stackrel{!}{=} 12 \Rightarrow A = \frac{1}{L}(12 - B) = \frac{8}{L}. \end{aligned}$$

Somit haben wir:

$$u_p(x,t) = \frac{8}{L}x + 4,$$

und das homogene Problem ($u_h = u - u_p$) hat per Konstruktion folgende Form:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u_h - k\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_h &= 0 - \left\{ \frac{\partial}{\partial t}u_p - k\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_p \right\} = 0 \\ u_h(0,t) &= 4 - u_p(0,t) = 0 \qquad \forall t > 0 \\ u_h(L,t) &= 12 - u_p(L,t) = 0 \qquad \forall t > 0 \\ u_h(x,0) &= f(x) - u_p(x,0). \end{aligned}$$

Mit diesem Trick ist es uns gelungen das ursprüngliche (inhomogene) Gleichungssystem in ein Homogenes zu verwandeln:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u_h - k\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_h &= 0 \\ u_h(0,t) &= 0 \qquad \forall t > 0 \\ u_h(L,t) &= 0 \qquad \forall t > 0 \\ u(x,0) &= f(x) - u_p(x,0). \end{aligned}$$

Die homogene Lösung u_h lässt sich nun völlig analog zum obigen Beispiel finden. Zum Schluss müssen wir dann natürlich noch homogene und partikuläre Lösung zusammensetzen:

$$u(x,t) = u_h(x,t) + u_p(x,t) = u_h(x,t) + \frac{8}{L}x + 4.$$

6 Fourier-Reihen

Mithilfe einer Fourierreihe können beliebige periodische (oder periodisch fortgesetzte) Funktionen als Reihe (unendlich lange Summe) von Funktionen dargestellt werden. Die folgenden Theoreme gelten für beliebige "brave" T-periodische Funktionen.

6.1 Die Reelle Fourierreihe

6.1.1 Theorem(*reelle Fourierreihe*)

Jede integrable T-periodische Funktion ($f(x+T) = f(x) \;\; \forall x$) kann in einer reellen Fourierreihe entwickelt werden:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\{k\omega x\} + b_k \sin\{k\omega x\}\right) \\ \omega &= \frac{2\pi}{T} \\ \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{T} \int\limits_{c}^{c+T} f(x)\,\mathrm{d}x \\ a_k &= \frac{2}{T} \int\limits_{c}^{c+T} f(x) \cos\{k\omega x\}\,\mathrm{d}x \\ b_k &= \frac{2}{T} \int\limits_{c}^{c+T} f(x) \sin\{k\omega x\}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Die Konstante c, welche in jedem Integral vorkommt, kann beliebig gewählt werden. Oft erleichtert eine kluge Wahl von c das Berechnen der Reihe.

6.1.2 Lemma (*gerade und ungerade Funktionen*)

Sei $f_u(x)$ eine beliebige (integrable) <u>ungerade</u> Funktion ($f_u(-x) = -f_u(x)$) und sei $f_g(x)$ eine beliebige (integrable) <u>gerade</u> Funktion ($f_g(-x) = f_g(x)$. Dann gilt Folgendes:

$$\begin{aligned} \int\limits_{-a}^{a} f_u(x)\,dx &= 0 \qquad \forall a \in [0,\infty[\\ \int\limits_{-a}^{a} f_g(x)\,dx &= 2\int\limits_{0}^{a} f_g(x)\,\mathrm{d}x \qquad \forall a \in [0,\infty[\,. \end{aligned}$$

Beweis Wir betrachten zunächst den ungeraden Fall. Hier gilt:

$$f_u(-x) = -f_u(x)\,.$$

Natürlich kann man das zu berechnende Integral aufspalten:

$$\int\limits_{-a}^{a} f_u(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-a}^{0} f_u(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{a} f_u(x)\,\mathrm{d}x.$$

Im ersten Integral können wir folgende Substitution anwenden:

$$\begin{aligned} y &= -x \\ \mathrm{d}x &= -\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

welche folgendes impliziert:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{0} f_u(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{a}^{0} f_u(-y)\,(-\mathrm{d}y) = -\int_{a}^{0} \{-f_u(y)\}\,\mathrm{d}y = \int_{a}^{0} f_u(y)\,\mathrm{d}y \\ &= -\int_{0}^{a} f_u(x)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

da $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ gilt. Damit verschwindet der Ausdruck für das Gesamtintegral:

$$\int_{-a}^{a} f_u(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f_u(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f_u(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{a} f_u(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f_u(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

und der erste Teil des Lemmas ist bewiesen.
Im geraden Fall können wir analog vorgehen, nur dass hier $f_g(-x) = f_g(x)$ gilt. Somit unterscheidet sich diese Betrachtung von der obigen lediglich durch ein Minuszeichen. Es gilt also.

$$\int_{-a}^{0} f_g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f_g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Für den Gesamtausdruck bedeutet das:

$$\int_{-a}^{a} f_g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f_g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f_g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f_g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f_g(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f_g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Somit ist das Lemma bewiesen.

6.1.3 Korollar (*Fourierreihe gerader und ungerader Funktionen*)

- Für die Fourierreihe einer ungeraden Funktion $f_u(x)$ gilt:

  $$\begin{aligned} a_k &= 0 \\ a_0 &= 0, \end{aligned}$$

  und somit: $f_u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega x)$

- Für die Fourierreihe einer gerade Funktion gilt:

$$b_k = 0,$$

und somit: $f_g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega x)$.

Beweis: Dieses Korollar ist eine direkte Folgerung des obigen Lemmas. Für jede ungerade Funktion $f_u(x)$ ist $f_u(x)\cos(k\omega x)$ ebenfalls ungerade. Wählen wir $c = -\frac{T}{2}$, so erhalten wir für a_k und $\frac{a_0}{2}$ respektive:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int\limits_c^{c+T} f_u(x)\cos\{k\omega x\}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_u(x)\cos\{k\omega x\}\,\mathrm{d}x = 0 \\ \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{T}\int\limits_c^{c+T} f_u(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_u(x)\,\mathrm{d}x = 0, \end{aligned}$$

gemäß Lemma 6.1.2 (das Integral einer ungeraden Funktion über ein symmetrisches Invervall verschwindet ja). Umgekehrt gilt für eine gerade Funktion $f_g(x)$, dass $f_g(x)\sin(k\omega x)$ eine ungerade Funktion ist. Wählt man wieder $c = -\frac{T}{2}$, so gilt in diesem Fall:

$$b_k = \frac{2}{T}\int\limits_c^{c+T} f_g(x)\sin\{k\omega x\}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_g(x)\sin\{k\omega x\}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Damit haben wir das Korollar bewiesen. □

6.2 Die komplexe Fourierreihe

Analog zur reellen Fourierreihe gibt es auch eine komplexe Fourierreihe. Wir wollen sie hier einführen.

6.2.1 Theorem (*komplexe Fourierreihe*)

Jede integrable T-periodische Funktion ($f(x+T) = f(x)$ für x beliebig) kann in einer komplexen Fourierreihe entwickelt werden:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{ik\omega x} \\ c_k &= \frac{1}{T}\int\limits_c^{c+T} f(x)\,\mathrm{e}^{-ik\omega x}\mathrm{d}x \qquad k \neq 0 \\ c_0 &= \frac{1}{T}\int\limits_c^{c+T} f(x)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

wobei die Konstante c wieder beliebig gewählt werden kann.

6.2.2 Theorem (*Zusammenhang zwischen reeller und komplexer Fourierreihe*)

Reelle und komplexe Fourierreihe sind äquivalent. Für die jeweils auftauchenden Konstanten gilt folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{a_k + ib_k}{2} \text{ für } k < 0 \\ c_k &= \frac{a_k - ib_k}{2} \text{ für } k > 0 \\ c_0 &= \frac{a_0}{2}, \end{aligned} \tag{20}$$

oder wenn man die Gleichungen umkehrt:

$$\begin{aligned} a_k &= (c_k + c_{-k}) \\ b_k &= i\,(c_k - c_{-k}) \\ \frac{a_0}{2} &= c_0. \end{aligned} \tag{21}$$

Beweis: Wir verwenden die Identitäten $\cos\{x\} = \frac{1}{2}\left\{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}\right\}$ und $\sin\{x\} = \frac{1}{2i}\left\{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}\right\}$ um die reelle Fourierreihe umzuschreiben:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos\{k\omega x\} + b_k \sin\{k\omega x\}) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{1}{2} \left\{\mathrm{e}^{ik\omega x} + \mathrm{e}^{-ik\omega x}\right\} + b_k \frac{1}{2i} \left\{\mathrm{e}^{ik\omega x} - \mathrm{e}^{-ik\omega x}\right\} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \left[a_k + \frac{1}{i} b_k \right] \mathrm{e}^{ik\omega x} + \frac{1}{2} \left[a_k - \frac{1}{i} b_k \right] \mathrm{e}^{-ik\omega x} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_k - ib_k)\, \mathrm{e}^{ik\omega x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_k + ib_k)\, \mathrm{e}^{-ik\omega x} \\ &= \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{c_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2} (a_k - ib_k)}_{c_k \text{ für } k>0} \mathrm{e}^{ik\omega x} + \sum_{k=-1}^{-\infty} \underbrace{\frac{1}{2} (a_{-k} + ib_{-k})}_{c_k \text{ für } k<0} \mathrm{e}^{ik\omega x} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{ik\omega x}. \end{aligned}$$

Die komplexe Fourierreihe kann also aus der Reellen hergeleitet werden, wobei obiger Zusammenhang (20) gilt. Damit haben wir die Äquivalenz beider Reihen gezeigt. (21) folgt direkt aus (20). □

6.2.3 Bemerkung

Das obige Theorem zeigt, dass reelle und komplexe Fourierreihe äquivalent sind. Das Berechnen der reellen Fourierreihe involviert nur reelle Zahlen und erlaubt

eine signifikante Vereinfachung, falls die betreffende Funktion gerade oder ungerade ist.
Die komplexe Fourierreihe involviert stets komplexe Zahlen und eine Vereinfachung für gerade oder ungerade Funktionen ist nicht möglich. Dafür müssen stets nur 2 Koeffizienten - c_0 und c_k- berechnet werden. Zusätzlich sind die dafür nötigen partiellen Integrationen im Allgemeinen leichter durchzuführen.

6.3 Beispiele

6.3.1 Beispiel: reelle Fourierreihe der Sägezahnfunktion

Wir berechnen die reelle Fourierreihe der Sägezahnfunktion: $f(x) = x$ auf $[-1,1]$ und dann periodisch fortgesetzt. Eingeschränkt auf das periodisch fortgesetzte Intervall ist diese Funktion offenbar ungerade:

$$f(-x) = -x = -f(x),$$

und die periodische Fortsetzung ändert nichts an dieser Tatsache. Für die Periode gilt $T = 2$ (T bezeichnet stets die Länge des Intervalls) und somit gilt:

$$\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Wir wissen außerdem, dass $\frac{a_0}{2}$ und alle a_k verschwinden, da die Funktion ungerade ist. Daher müssen wir nur mehr alle b_k berechnen. Die Konstante c kann willkürlich gewählt werden und wir entscheiden uns für $c = -1$ (es ist immer eine gute Idee c so zu wählen, dass ein um 0 symmetrisches Integrationsintervall entsteht). Dann gilt:

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T}\int_c^{c+T} f(x)\sin\{k\omega x\}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2}\int_{-1}^{-1+2} x\sin\{k\pi x\}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x\sin\{k\pi x\}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{p.I}}{=} -\frac{1}{k\pi}x\cos\{k\pi x\}\,|_{-1}^{1} + \frac{1}{k\pi}\int_{-1}^{1}\cos\{k\pi x\}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{k\pi}(1)\cos\{k\pi\} + \frac{1}{k\pi}(-1)\cos\{-k\pi\} + \frac{1}{(k\pi)^2}\sin\{k\pi x\}\,|_{-1}^{1} \\
&= -\frac{1}{k\pi}\cos\{k\pi\} - \frac{1}{k\pi}\cos\{k\pi\} + \frac{1}{(k\pi)^2}\sin\{k\pi\} - \frac{1}{(k\pi)^2}\sin\{-k\pi\} \\
&= -\frac{2}{k\pi}\cos\{k\pi\} + \frac{1}{(k\pi)^2}\sin\{k\pi\} + \frac{1}{(k\pi)^2}\sin\{k\pi\} \\
&= -\frac{2}{k\pi}\cos\{k\pi\} + \frac{2}{(k\pi)^2}\sin\{k\pi\},
\end{aligned}$$

wobei wir $\cos\{-x\} = \cos\{x\}$ und $\sin\{-x\} = -\sin\{x\}$ benützt haben. Nun gilt allerdings:

$$
\begin{aligned}
\sin\{k\pi\} &= 0 \;\forall k \in \mathbb{Z} \\
\cos\{k\pi\} &= (-1)^k \;\; \forall k \in \mathbb{Z},
\end{aligned}
$$

und somit folgt für b_k:

$$
b_k = -\frac{2}{k\pi}\cos\{k\pi\} + \frac{2}{(k\pi)^2}\sin\{k\pi\} = -\frac{2}{k\pi}(-1)^k = -\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{k}.
$$

Damit haben wir die gesuchte Fourierreihe auch schon gefunden:

$$
f(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin\{k\pi x\}.
$$

6.3.2 Beispiel: komplexe Fourierreihe der Sägezahnfunktion

Wir berechnen nun auch noch die komplexe Fourierreihe der Sägezahnfunktion: $f(x) = x$ auf $[-1,1]$ und dann periodisch fortgesetzt. Es gilt wieder $T = 2$ und somit:

$$
\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi.
$$

Nun müssen wir die Koeffizienten c_k berechnen. Die Konstante c wählen wir wieder als -1 und mit p.I. kennzeichnen wir partielle Integration:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{T}\int\limits_c^{c+T} f(x)\,\mathrm{e}^{-i0\omega x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^2|_{-1}^{1} = 0. \\
c_k &= \frac{1}{T}\int\limits_c^{c+T} f(x)\,\mathrm{e}^{-ik\omega x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} x\mathrm{e}^{-ik\pi x}\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{p.I.}}{=} \frac{1}{2}\frac{1}{(-ik\pi)}x\mathrm{e}^{-ik\pi x}|_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(-ik\pi)}\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-ik\pi x}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2ik\pi}\mathrm{e}^{-ik\pi} - \frac{1}{2ik\pi}\mathrm{e}^{ik\pi} + \frac{1}{2ik\pi}\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-ik\pi x}dx \\
&= -\frac{1}{2ik\pi}\left\{\left(\mathrm{e}^{i\pi}\right)^k + \left(\mathrm{e}^{-i\pi}\right)^k\right\} - \frac{1}{2(ik\pi)^2}\mathrm{e}^{-ik\pi x}|_{-1}^{1} \\
&= -\frac{1}{2ik\pi}\left\{(-1)^k + (-1)^k\right\} - \frac{1}{2(ik\pi)^2}\left\{\mathrm{e}^{-ik\pi} - \mathrm{e}^{ik\pi}\right\} \\
&= -\frac{(-1)^k}{ik\pi} - \frac{1}{2(ik\pi)^2}\left\{(-1)^k - (-1)^k\right\} = -\frac{(-1)^k}{ik\pi},
\end{aligned}
$$

wobei in der Rechnung $(e^a)^b = e^{ab}$ und $e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1$ verwendet wurden. Mithilfe von (21) können wir daraus auch die reelle Fourierreihe ermitteln:

$$
\begin{aligned}
\frac{a_0}{2} &= c_0 = 0 \\
a_k &= (c_k + c_{-k}) = -\frac{(-1)^k}{ik\pi} - \frac{(-1)^{(-k)}}{i(-k)\pi} = 0 \\
b_k &= i(c_k - c_{-k}) = i\left(-\frac{(-1)^k}{ik\pi} + \frac{(-1)^{(-k)}}{i(-k)\pi}\right) = -\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{k},
\end{aligned}
$$

was genau unserem obigen Ergebnis entspricht.

6.3.3 Beispiel: komplexe Fourierreihe von e^x auf $[-\pi, \pi]$

Berechne die komplexe Fourierreihe der periodischen Fortsetzung von $f(x) = e^x$ auf $[-\pi, \pi]$. Das bedeutet, dass $T = 2\pi$ und somit:

$$\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1.$$

Wenn wir die frei wählbare Konstante $c = -\pi$ setzen, dann gilt für die Fourierkoeffizienten c_0 und c_k:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{T}\int_c^{c+T} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\sinh(\pi) \\
c_k &= \frac{1}{T}\int_c^{c+T} f(x)\,\mathrm{e}^{-ik\omega x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{x-ikx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{(1-ik)x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-ik}\mathrm{e}^{(1-ik)x}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-ik}\left(\mathrm{e}^{(1-ik)\pi} - \mathrm{e}^{-(1-ik)\pi}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-ik}\left(\mathrm{e}^{\pi}\mathrm{e}^{-ik\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}\mathrm{e}^{ik\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-ik}\left(\mathrm{e}^{\pi}\left(\mathrm{e}^{-i\pi}\right)^k - \mathrm{e}^{-\pi}\left(\mathrm{e}^{i\pi}\right)^k\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-ik}\left(\mathrm{e}^{\pi}(-1)^k - \mathrm{e}^{-\pi}(-1)^k\right) = \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^k}{1-ik}\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^k}{1-ik}\sinh(\pi).
\end{aligned}
$$

Somit gilt $c_0 = c_{k=0}$ und wir haben die komplexe Fourierreihe gefunden:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\sinh(\pi)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1-ik}\mathrm{e}^{ikx}.$$

Nun können wir mithilfe des oben angeführten Zusammenhangs auch die reellen Fourierkoeffizienten aus den c_k bestimmen:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 2c_0 = 2\frac{1}{\pi}\frac{(-1)^k}{1-ik}\sinh(\pi)\,|_{k=0} = \frac{2}{\pi}\sinh(\pi) \\
a_k &= c_k + c_{-k} = \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^k}{1-ik}\sinh(\pi) + \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^{-(k)}}{1-i(-k)}\sinh(\pi) \\
&= \frac{\sinh(\pi)}{\pi}\left\{\frac{(-1)^k}{1-ik} + \frac{(-1)^{-k}}{1+ik}\right\} = \frac{\sinh(\pi)}{\pi}(-1)^k\left\{\frac{1}{1-ik} + \frac{1}{1+ik}\right\} \\
&= (-1)^k\frac{\sinh(\pi)}{\pi}\left\{\frac{(1+ik)+(1-ik)}{(1-ik)(1+ik)}\right\} = (-1)^k\frac{\sinh(\pi)}{\pi}\left\{\frac{2}{1+k^2}\right\} \\
&= \frac{2}{\pi}\sinh(\pi)\frac{(-1)^k}{1+k^2} \\
b_k &= i(c_k - c_{-k}) = i\left(\frac{1}{\pi}\frac{(-1)^k}{1-ik}\sinh(\pi) - \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^{-(k)}}{1-i(-k)}\sinh(\pi)\right) \\
&= i\left(\frac{\sinh(\pi)}{\pi}(-1)^k\left\{\frac{1}{1-ik} - \frac{1}{1+ik}\right\}\right) \\
&= i\frac{\sinh(\pi)}{\pi}(-1)^k\left\{\frac{(1+ik)-(1-ik)}{(1-ik)(1+ik)}\right\} = i\frac{\sinh(\pi)}{\pi}(-1)^k\left\{\frac{2ik}{1+k^2}\right\} \\
&= -\frac{2}{\pi}\sinh(\pi)(-1)^k\frac{k}{1+k^2}.
\end{aligned}
$$

Die reelle Fourierreihe hat daher folgende Form:

$$
f(x) = \frac{1}{\pi}\sinh(\pi) + \frac{2}{\pi}\sinh(\pi)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1+k^2}\cos(kx) - \frac{2}{\pi}\sinh(\pi)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(-1)^k}{1+k^2}\sin(kx).
$$

Bemerkung: Ist das Berechnen der Fourierreihe von Exponentialfunktionen gefragt, so ist die komplexe Fourierreihe dafür besser geeignet als die Reelle.

6.3.4 Beispiel: Fourierreihe von $\sin^2\{5x\}$

Wir berechnen die Fourierreihe von $f(x) = \sin^2\{5x\}$. Hier können wir einen netten Trick anwenden und das tatsächliche Berechnen der Koeffizienten vermeiden. Es gilt ja schließlich $\sin\{kx\} = \frac{1}{2i}\left\{e^{ikx} - e^{-ikx}\right\}$. Und damit lässt sich $f(x)$ folgendermaßen umschreiben:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin^2\{5x\} = (\sin\{5x\})^2 = \left(\frac{1}{2i}\left\{e^{i5x} - e^{-i5x}\right\}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{4}\left(e^{2i5x} - 2 + e^{-2i5x}\right) = +\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(e^{i10x} + e^{-i10x}\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(10x).
\end{aligned}
$$

Das ist aber bereits die reelle Fourierreihe der Funktion und wir können die Koeffizienten ablesen:

$$\begin{aligned}\frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2} \\ a_{10} &= -\frac{1}{2} \\ a_k &= 0 \qquad \text{sonst} \\ b_k &= 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

6.4 Fourierreihen und der Grenzwert von Reihen

Eine überraschende Anwendung der Theorie der Fourierreihen ist das Berechnen von Grenzwerten unendlich langer Summen (Reihen). In diesem Abschnitt wollen wir das Paradebeispiel einer solchen Reihe, nämlich die Riemannsche ζ-Funktion[5] $\zeta(2)$, betrachten. Unser Ziel ist es, den Grenzwert diese Reihe zu berechnen:

$$\zeta(2) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Um das zu bewerkstelligen betrachten wir zunächst folgendes Beispiel, welches auf den ersten Blick nichts mit unserem Problem zu tun hat.

6.4.1 Beispiel: reelle Fourierreihe von $f(x) = 1 - \frac{2|x|}{\pi}$ auf $x \in [-\pi, \pi]$

Wir berechnen die reelle Fourierreihe der periodischen Fortsetzung von $f(x)$. Die Periode der resultierenden Funktion ist offensichtlich 2π und die Funktion selbst ist offensichtlich gerade auf $[-\pi, \pi]$:

$$f(-x) = 1 - \frac{2|-x|}{\pi} = 1 - \frac{2|x|}{\pi} = f(x).$$

[5] Die ζ-Funktion hängt eng mit der Riemannschen Vermutung, einem der berühmten Milleniumprobleme der Mathematik, zusammen.

Die periodische Fortsetzung erhält diese Eigenschaft. Daraus können wir bereits folgern, dass b_k verschwindet. Außerdem gilt mit $c = -\pi$:

$$
\begin{aligned}
\frac{a_0}{2} &= \frac{1}{T}\int\limits_{c}^{c+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(1-\frac{2|x|}{\pi}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1\mathrm{d}x - \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|x|\,\mathrm{d}x \\
&= 1 + \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{0} x\mathrm{d}x - \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{0}^{\pi} x\mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{2\pi^2}x^2|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{2\pi^2}x^2|_{0}^{\pi} \\
&= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0. \\
a_k &= \frac{2}{T}\int\limits_{c}^{c+T} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(1-\frac{2|x|}{\pi}\right)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\,\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|x|\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi k}\sin(kx)\,|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{\pi^2}\left(\int\limits_{-\pi}^{0} x\cos(kx)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{0}^{\pi} x\cos(kx)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2}{\pi^2 k}x\sin(kx)\,|_{-\pi}^{0} - \frac{2}{\pi^2 k}\int\limits_{-\pi}^{0}\sin(kx)\,\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi^2 k}x\sin(kx)\,|_{0}^{\pi} + \frac{2}{\pi^2 k}\int\limits_{0}^{\pi}\sin(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi^2 k^2}\cos(kx)\,|_{-\pi}^{0} - \frac{2}{\pi^2 k^2}\cos(kx)\,|_{0}^{\pi} = \frac{2}{\pi^2 k^2}\{1-\cos(-k\pi)-\cos(k\pi)+1\} \\
&= \frac{4}{\pi^2 k^2}\{1-\cos(k\pi)\} = \begin{cases} \frac{8}{\pi^2 k^2} & \text{falls } k \text{ungerade (odd)} \\ 0 & \text{falls } k \text{gerade (even).} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Die letzte Gleichheit folgt aus der Tatsache, dass

$$
\begin{aligned}
\cos(\pi) &= \cos(3\pi) = \ldots = -1 \\
\cos(0) &= \cos(2\pi) = \ldots = 1.
\end{aligned}
$$

Und damit haben wir unsere gesuchte Fourierreihe gefunden:

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k\mathrm{odd}}\frac{1}{k^2}\cos(kx).$$

6.4.2 Beispiel: Ermitteln von $\zeta(2)$

Im vorigen Beispiel haben wir folgende Reihenentwicklung ermittelt:

$$f(x) = 1 - \frac{2|x|}{\pi} = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k\mathrm{odd}}\frac{1}{k^2}\cos(kx).$$

Diese Gleichheit gilt für beliebige $x \in [-\pi, \pi]$ und somit auch für $x = 0$. Setzen wir diesen Wert für x ein, erhalten wir:

$$f(0) = 1 = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k \text{odd}} \frac{1}{k^2},$$

da $\cos(0) = 1$. Daraus können wir aber folgende Aussage gewinnen:

$$\sum_{k \text{odd}} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Und genau dieses Resultat brauchen wir um $\zeta(2)$ zu berechnen. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} \zeta(2) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k \text{odd}} \frac{1}{k^2} + \sum_{k \text{even}} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8} + \sum_{k \text{even}} \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{\pi^2}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\zeta(2), \end{aligned}$$

und damit:

$$\frac{3}{4}\zeta(2) = \frac{\pi^2}{8} \Rightarrow \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Somit ist es uns gelungen den Grenzwert Zetafunktion mithilfe einer Fourierentwicklung zu finden.

6.5 Sinus- und Cosinusreihen

In diesem Kapitel betrachten wir Funktionen, die nur auf einem Intervall $[0, L]$ ($L > 0$) interessieren. Damit meinen wir, dass es keine Rolle spielt wie diese Funktionen außerhalb dieses Intervalls aussehen. Für solche Funktionen gelten folgende Theoreme.

6.5.1 Theorem (*Cosinusreihe*)

Es sei $f(x)$ eine auf $[0, L]$ definierte integrable Funktion. Dann lässt sich diese Funktion als Cosinusreihe darstellen, das heißt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \qquad \forall x \in [0, L] \\ \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x. \\ a_k &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Beweis: Die Funktion $f(x)$ ist auf $[0, L]$ definiert und interessiert uns auch nur auf diesem Intervall. Außerhalb von $[0, L]$ können wir mit der Funktion "machen was wir wollen". Insbesondere können wir diese Freiheit dazu zu nützen $f(x)$ gerade von $[0, L]$ auf $[-L, L]$ fortzusetzen. Das heißt wir definieren:

$$f(x) := f(|x|) \quad \forall x \in [-L, 0].$$

Somit produzieren wir eine gerade Funktion auf dem Intervall $[-L, L]$. Diese Funktion können wir nun zusätzlich periodisch fortsetzen. Als Resultat erhalten wir eine gerade periodische Funktion $\tilde{f}(x)$ welche eingeschränkt auf $[0, L]$ genau unserer Ausgangsfunktion $f(x)$ entspricht. Diese neue Funktion können wir in einer Fourierreihe darstellen. Da $\tilde{f}(x)$ gerade ist, gilt:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \\
\frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x \\
a_k &= \frac{2}{2L}\int_{-L}^{L} \tilde{f}(x)\cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

und da per Konstruktion $\tilde{f}(x) = f(x)\,\forall x \in [0, L]$ gilt, folgt daraus das Theorem. □

6.5.2 Theorem (*Sinusreihe*)

Es sei $f(x)$ eine auf $[0, L]$ definierte integrable Funktion. Dann lässt sich diese Funktion als Sinusreihe darstellen, das heißt:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \qquad \forall x \in [0, L]. \\
b_k &= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Beweis: Der Beweis zur Sinusreihe verläuft sehr ähnlich wie der von der Cosinusreihe. Allerdings setzen wir $f(x)$ hier ungerade von $[0, L]$ auf $[-L, 0]$ fort:

$$f(x) := -f(|x|) \quad \forall x \in [-L, 0].$$

Die so entstandene ungerade Funktion setzen wir periodisch von $[-L, L]$ fort. Als Resultat erhalten wir eine ungerade periodische Funktion $\tilde{f}(x)$ und diese können wir nun als Fourierreihe darstellen. Da die Funktion ungerade (und

$\widetilde{f}(x)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ somit gerade) ist, gilt:

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \\
b_k &= \frac{2}{2L}\int_{-L}^{L} \tilde{f}(x)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Da $f(x) = \tilde{f}(x)$ auf $[0, L]$ folgt daraus unmittelbar das Theorem. $\square$

6.6 Lösen von Differentialgleichungen mit Fourierreihen

Fourierreihen stellen ein mächtiges Werkzeug dar, wenn es um das Lösen von Differentialgleichungen auf endlichen Intervallen[6] geht. Wir wollen dieses Herangehen mit zwei Beispielen skizzieren.

6.6.1 Beispiel: $u'(x) - u(x) = x$ auf $x \in [-1, 1]$ und periodisch fortgesetzt.

Wir lösen diese Differentialgleichung mit einem Fourierreihenansatz. Aus Abschnitt 6.3.1 kennen wir schon die Fourierreihenentwicklung für die "Sägezahnfunktion" $f(x)$:

$$f(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin\{k\pi x\}.$$

Nun nehmen wir an, dass die Lösungsfunktion $u(x)$ stetig ist. Dann muss sie notgedrungen dieselbe Periodizität wie $f(x)$ haben (die DGL muss ja immer und überall erfüllt sein) und somit können wir auch $u(x)$ in einer Fourierreihe mit gleicher Periode entwickeln. Diese Periode ist $T = 2$, woraus $\omega = \pi$ folgt. Wir haben somit:

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\{k\omega x\} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\{k\omega x\} \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\{k\pi x\} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\{k\pi x\}.
\end{aligned}
$$

[6] Funktionen auf endlichen Intervallen kann man immer periodisch fortsetzen, ohne die Funktion auf dem ursprünglichen Intervall zu ändern. Dieser Trick erlaubt dann stets eine Fourieranalyse.

Für diese Funktion können wir ganz allgemein die Ableitung berechnen:

$$\begin{aligned}
u^{'}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\{k\pi x\} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\{k\pi x\}\right\} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\{k\pi x\} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin\{k\pi x\} \\
&= 0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(-k\pi \sin\{k\pi x\}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\left(k\pi \cos\{k\pi x\}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k\pi b_k \cos\{k\pi x\} - \sum_{k=1}^{\infty} k\pi a_k \sin\{k\pi x\}.
\end{aligned}$$

Jetzt können wir auch $u^{'}(x) - u(x)$ in Fourierreihenform schreiben:

$$\begin{aligned}
u^{'}(x) - u(x) &= \left[\sum_{k=1}^{\infty} k\pi b_k \cos\{k\pi x\} - \sum_{k=1}^{\infty} k\pi a_k \sin\{k\pi x\}\right] \\
&\quad - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\{k\pi x\} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\{k\pi x\}\right] \\
&= -\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(k\pi b_k - a_k\right)\cos\{k\pi x\} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(-k\pi a_k - b_k\right)\sin\{k\pi x\}.
\end{aligned}$$

Die so erhaltene Reihenentwicklung können wir jetzt in die Differentialgleichung einsetzen:

$$\begin{aligned}
u^{'}(x) - u(x) &= -\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(k\pi b_k - a_k\right)\cos\{k\pi x\} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(-k\pi a_k - b_k\right)\sin\{k\pi x\} \\
&\stackrel{!}{=} \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{k}\sin\{k\pi x\} = f(x).
\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung können wir nun Bedingungen für die (noch unbekannten) Fourierkoeffizienten a_0, a_k und b_k ablesen. Damit die Gleichheit erfüllt ist muss nämlich gelten:

$$\begin{aligned}
-\frac{a_0}{2} &= 0 && \Longrightarrow a_0 = 0 && \text{I.} \\
\left(k\pi b_k - a_k\right) &= 0 && \Longrightarrow a_k = k\pi b_k && \text{II.} \\
\left(-k\pi a_k - b_k\right) &= -\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{k} && && \text{III.}
\end{aligned}$$

Bedingungen II. und III. ergeben ein lineares Gleichungssystem mit 2 Unbekannten, welches zum Beispiel durch Einsetzen ($a_k = k\pi b_k$) gelöst werden kann:

$$\begin{aligned}
-k\pi a_k - b_k &= -\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{k} \\
-k\pi\left(k\pi b_k\right) - b_k &= -\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{k} \\
\left(\pi^2k^2+1\right) b_k &= \frac{2}{\pi k}(-1)^k \\
b_k &= \frac{2(-1)^k}{\pi k\left(\pi^2k^2+1\right)}.
\end{aligned}$$

Mit $a_k = k\pi b_k$ folgt somit:

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2(-1)^k}{\pi k\left(\pi^2k^2+1\right)} \\
a_k &= \frac{2(-1)^k}{\left(\pi^2k^2+1\right)},
\end{aligned}$$

und wir haben die Lösung der Differentialgleichung in Form einer Fourierreihe gefunden:

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\{k\pi x\} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\{k\pi x\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{\left(\pi^2k^2+1\right)} \cos\{k\pi x\} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{\pi k\left(\pi^2k^2+1\right)} \sin\{k\pi x\}.
\end{aligned}$$

6.6.2 Beispiel: Lösen der Wellengleichung durch Variablenseparation

Dieses Beispiel behandelt eine weitere wichtige Anwendung der Fourierreihen. Sie können dazu dienen Randbedingungen in brauchbare Form umzuschreiben. Wie dies funktioniert, wollen wir anhand der homogenen Wellengleichung zeigen:

$$\begin{aligned}
u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) &= 0 \quad \forall x \in [0,L], \forall t > 0 && (22) \\
u(0,t) &= 0 \quad \forall t > 0 && (23) \\
u(L,t) &= 0 \quad \forall t > 0 && (24) \\
u(x,0) &= f(x) \quad \forall x \in [0,L] && (25) \\
u_t(0,t) &= g(x) \quad \forall x \in [0,L]. && (26)
\end{aligned}$$

Wir wollen diese DGl durch Variablenseparation lösen. Dazu machen wir folgenden Standardansatz:

$$u(x,t) = X(x)\,T(t). \tag{27}$$

Dieser Ansatz ermöglicht es uns (22) zu separieren:

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = X(x)\,T_{tt}(t) - c^2 T(t)\,X_{xx}(x) = 0.$$

Wenn wir diesen Ausdruck durch $X(x)\,T(t)$ dividieren und sortieren, so erhalten wir:

$$\frac{1}{T(t)} T_{tt}(t) = \frac{c^2}{X(x)} X_{xx}(x).$$

Da die linke Seite nur von t und die Rechte nur von x abhängt kann diese Gleichung nur dann gelten, wenn beide Seiten konstant sind (Separationsargument). Wir können diese Konstante mit $-\omega^2$ bezeichnen und erhalten:

$$\begin{aligned} X_{xx}(x) &= -\omega^2 X(x) && (28)\\ T_{tt}(t) &= -c\omega^2 T(t). && (29) \end{aligned}$$

Zusammen mit den Randbedingungen (23) und (24) erhalten wir mit (28) folgende DGL für die x-Komponente:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} X(x) &= -\omega^2 X(x)\\ X(0) &= 0\\ X(L) &= 0. \end{aligned}$$

Wie wir schon anhand der Wärmeleitungsgleichung (Kapitel 5.1) gezeigt haben, erzwingen die Randbedingung folgende nichttriviale Lösung:

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{und} \quad X(x) = A_n \sin(\omega_n x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad n = 1, 2, \ldots. \qquad (30)$$

Die DGL für die t-Komponente ist durch keine Randbedingungen eingeschränkt, allerdings darf sie nicht explodieren (das wäre unphysikalisch). Sie beschränkt sich daher auf (29):

$$T_{tt}(t) = -c^2\omega^2 T(t).$$

Allerdings ist das hier auftauchende ω bereits durch (30) festgelegt ($\omega_n = \frac{n\pi}{L}$). Somit erhalten wir folgende allgemeine Lösung:

$$T(t) = B_n \cos(c\omega_n t) + C_n \sin(c\omega_n t) \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (31)$$

(Die Lösung $T(t) = B_n \mathrm{e}^{c\omega_n t} + C_n \mathrm{e}^{-c\omega_n t}$ ist prinzipiell auch denkbar. Allerdings expolodiert sie für $t \to \infty$ und kommt daher nicht in Frage) Die zu diesen Lösungen gehörige Gesamtlösung kann durch den Separationsansatz (27) gewonnen werden:

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= X(x)\,T(t) = A_n \sin(\omega_n x)\left\{B_n \cos(c\omega_n t) + C_n \sin(c\omega_n t)\right\}\\ &= a_n \sin(\omega_n x)\cos(c\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n x)\sin(c\omega_n t) \quad n = 1, 2\ldots \end{aligned}$$

$u_n(x,t)$ stellt für jedes $n = 1, 2, \ldots$ eine Lösung des Systems dar. Gemäß dem Superpositionsprinzip ist die allgemeine Lösung demnach durch eine Linearkombination aller solchen Lösungen gegeben:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \sin(\omega_n x) \cos(c\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n x) \sin(c\omega_n t) \right\}. \tag{32}$$

Wir haben also die allgemeine Lösung gefunden. Allerdings sind die Konstanten a_n und b_n noch unbestimmt. Sie werde durch die verbleibenden Randbedingunen (25) und (26) festgelegt. Zum Beispiel verlangt (25):

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \sin(\omega_n x) \cos(c\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n x) \sin(c\omega_n t) \right\} |_{t=0} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\omega_n x) \stackrel{!}{=} f(x), \end{aligned} \tag{33}$$

wobei $f(x)$ eine auf $[0, L]$ definierte Funktion darstellt. Wir können diese Funktion in einer Sinusreihe darstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \sin(\omega_n x) \\ \tilde{a}_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(\omega_n x) \, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{34}$$

Eine Koeffizientenvergleich von (33) und (34) liefert:

$$a_n = \tilde{a}_n \Rightarrow a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(\omega_n x) \, \mathrm{d}x.$$

Ähnlich können wir mit Randbedingung (26) umgehen:

$$\begin{aligned} u_t(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -c\omega_n a_n \sin(\omega_n x) \sin(c\omega_n t) + c\omega_n b_n \sin(\omega_n x) \cos(c\omega_n t) \right\} |_{t=0} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c\omega_n b_n \sin(\omega_n x) \stackrel{!}{=} g(x). \end{aligned} \tag{35}$$

$g(x)$ ist ebenfalls eine auf $[0, L]$ definierte Funktion und wir können sie ebenfalls in einer Sinusreihe darstellen:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \sin(\omega_n x) \\ \tilde{b}_n &= \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin(\omega_n x) \, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{36}$$

ein Koeffizientenvergleich von (35) und (36) liefert:

$$c\omega_n b_n = \tilde{b}_n \Rightarrow b_n = \frac{1}{c\omega_n}\frac{2}{L}\int\limits_0^L g(x)\sin(\omega_n x)\,\mathrm{d}x.$$

Damit haben wir die an die Randbedingungen angepasste Lösung der Wellengleichung gefunden:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n \sin(\omega_n x)\cos(c\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n x)\sin(c\omega_n t)\} \\
a_n &= \frac{2}{L}\int\limits_0^L g(x)\sin(\omega_n x)\,\mathrm{d}x \\
b_n &= \tfrac{1}{c\omega_n}\frac{2}{L}\int\limits_0^L g(x)\sin(\omega_n x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Mithilfe bekannter Additionstheoreme ($\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\{\cos(x-y) - \cos(x+y)\}$ und $\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\{\sin(x-y) + \sin(x+y)\}$) können wir dieses Resultat noch folgendermaßen umschreiben:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{a_n}{2}[\sin(\omega_n\{x-ct\}) + \sin(\omega_n\{x+ct\})] + \frac{b_n}{2}[\cos(\omega_n\{x-ct\}) - \cos(\omega_n\{x+ct\})]\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{a_n}{2}\sin(\omega_n\{x-ct\}) + \frac{a_n}{2}\sin(\omega_n\{x+ct\}) + \frac{b_n}{2}\cos(\omega_n\{x-ct\}) - \frac{b_n}{2}\cos(\omega_n\{x+ct\})\right\} \\
a_n &= \frac{2}{L}\int\limits_0^L g(x)\sin(\omega_n x) \\
b_n &= \frac{1}{c\omega_n}\frac{2}{L}\int\limits_0^L g(x)\sin(\omega_n x).
\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass diese Lösung einer Linearkombination aus Funktionen der Form $f(x-ct)$ und $f(x+ct)$ besteht. Dass dies so sein muss, haben wir bereits in Abschnitt über die Formel von d'Alembert argumentiert.

7 Fouriertransformationen

Die Fouriertransformation bildet Funktionen auf Funktionen ab. Informell gesprochen ist die Fouriertransformation das Analogon der Fourierreihe für unendlich große Intervalle (die gesamte reelle Achse $\mathbb{R}$). Fouriertransformierte Funktionen haben einige besondere Eigenschaften, welche uns beim Lösen von DGL behilflich sein können. Diese Transformation und ihre Eigenschaften wollen wir uns daher in diesem Kapitel genauer ansehen.

7.1 Definition und Eigenschaften der Fouriertransformation

In diesem Kapitel widmen wir uns der Fouriertransformation (FT). Sie kann in vielerlei Hinsicht als Fourierreihenentwicklung für nichtperiodische Funktionen angesehen werden.

7.1.1 Definition (*Fouriertransformation*)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine absolut integrable Funktion (d.h.: $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, \mathrm{d}x < \infty$). Die Fouriertransformierte dieser Funktion ist definiert durch:

$$\hat{f}(k) = \mathcal{F}\{f(x)\}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{e}^{-ikx} \mathrm{d}x. \tag{37}$$

Die inverse Fouriertransformation ist fast analog definiert:

$$\check{f}(x) = \mathcal{F}^{-1}\{f(k)\}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(k)\, \mathrm{e}^{+ikx} \mathrm{d}k. \tag{38}$$

Sie ist die Umkehrabbildung der Fouriertransformation, wie man an folgender wichtiger Identität erkennen kann:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f(x)\}(k)\}(x) = \check{\hat{f}}(x) = f(x). \tag{39}$$

Salopp gesprochen bildet die Fouriertransformation x-abhängige Funktionen $f(x)$ ("Ortsraum") auf k-abhängige Funktionen $\hat{f}(k)$ ("Impulsraum") ab. Die inverse Fouriertransformation hingegen macht genau das Umgekehrte.

7.1.2 Theorem (*wichtige Eigenschaften der Fouriertransformation*)

Die Fouriertransformation hat folgende Eigenschaften:

1. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $\mathcal{F}\{f(\lambda x)\}(k) = \frac{1}{|\lambda|}\mathcal{F}\{f(x)\}\left(\frac{k}{\lambda}\right)$.
2. Für $\tau \in \mathbb{R}$ gilt: $\mathcal{F}\{f(x+\tau)\}(k) = \mathrm{e}^{i\tau k}\mathcal{F}\{f(x)\}(k) = \mathrm{e}^{i\tau k}\hat{f}(k)$.
3. Für beliebiges differenzierbares $f(x)$ gilt: $\mathcal{F}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\right\}(k) = ik\mathcal{F}\{f(x)\}(k) = ik\hat{f}(k)$.
4. Für beliebiges differenzierbares $f(x)$ gilt: $\mathcal{F}\{xf(x)\}(k) = i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\mathcal{F}\{f(x)\}(k) = i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\hat{f}(k)$.

Bemerkung: Die Eigenschaften 3. und 4. sind besonders wichtig. Sie besagen nämlich, dass die Fouriertransformation Ableitungen (also $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$) in Multiplikationen (also ik) verwandelt und umgekehrt. Das ermöglicht es uns Ableitungen in einer PDE in Multiplikationen zu verwandeln.

Beweis: Der Beweis besteht aus einer Einsetzübung:

1. Setzen wir Definition (37) in $\mathcal{F}\left\{f\left(\lambda x\right)\right\}(k)$ ein, so erhalten wir:

$$\mathcal{F}\left\{f\left(\lambda x\right)\right\}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f\left(\lambda x\right) \mathrm{e}^{-ikx} \mathrm{d}x.$$

   Mithilfe einer Variablensubstitution $y := \lambda x$, $\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right| = \frac{1}{|\lambda|}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f\left(\lambda x\right) \mathrm{e}^{-ikx} \mathrm{d}x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f\left(y\right) \mathrm{e}^{-ik\frac{\lambda}{\lambda}x} \frac{1}{|\lambda|} \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f\left(y\right) \mathrm{e}^{-i\left(\frac{k}{\lambda}\right)y} \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f\left(x\right) \mathrm{e}^{-i\left(\frac{k}{\lambda}\right)x} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{|\lambda|} \mathcal{F}\left\{f\left(x\right)\right\}\left(\frac{k}{\lambda}\right),
\end{aligned}$$

   was genau der gefragten Aussage entspricht.

2. Einsetzen der Definition (37) in das Gefragte ergibt:

$$\mathcal{F}\left\{f\left(x+\tau\right)\right\}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f\left(x+\tau\right) \mathrm{e}^{-ikx} \mathrm{d}x.$$

   Hier nützt uns folgende Variablensubstitution: $y := x + \tau$, $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$. Die Grenzen des Integrationsintervalls liegen bei $\pm\infty$ und ändern sich nicht durch eine endliche Translation. Somit:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f\left(x+\tau\right) \mathrm{e}^{-ikx} \mathrm{d}x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f\left(y\right) \mathrm{e}^{-ik(y-\tau)} \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{ik\tau} \int\limits_{\mathbb{R}} f\left(y\right) \mathrm{e}^{-iky} \mathrm{d}y \\
&= \mathrm{e}^{ik\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f\left(x\right) \mathrm{e}^{-ikx} \mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e}^{ik\tau} \mathcal{F}\left\{f\left(x\right)\right\}(k).
\end{aligned}$$

3. Hier ist partielle Integration der entscheidende Trick:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right\}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right\}\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)\,\mathrm{e}^{-ikx}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-ikx}\right\}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\left\{-ik\mathrm{e}^{-ikx}\right\}\mathrm{d}x \\
&= ik\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x \\
&= ik\mathcal{F}\{f(x)\}(k).
\end{aligned}$$

4. Offenbar hat e^{-ikx} folgende nützliche Eigenschaft: $x\mathrm{e}^{-ikx} = i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\mathrm{e}^{-ikx}$ (einfach nachrechnen). Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{xf(x)\}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} xf(x)\,\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\left\{x\mathrm{e}^{-ikx}\right\}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\left\{i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\mathrm{e}^{-ikx}\right\}\mathrm{d}x \\
&= i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x \\
&= i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\mathcal{F}\{f(x)\}(k). \qquad \square
\end{aligned}$$

7.1.3 Faltungstheorem

Die Faltung beschreibt eine mathematische Möglichkeit zwei Funktionen miteinander zu verknüpfen. Für zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist sie folgendermaßen definiert:

$$(f \circledast g)(x) := \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\,g(x-y)\,\mathrm{d}y. \tag{40}$$

Die Faltungsoperation ist kommutativ ($(f \circledast g)(x) = (g \circledast f)(x)$) und es gilt das Faltungstheorem:

$$\mathcal{F}\{(f \circledast g)(x)\}(k) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}\{f(x)\}(k)\,\mathcal{F}\{g(x)\}(k) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(k)\,\hat{g}(k) \tag{41}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f \circledast g)(x) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{f}(k)\,\hat{g}(k)\right\}(x) \tag{42}$$

Formel (42) ist besonders beim Rücktransformieren von großer Bedeutung. Dies wird im Abschnitt über Fouriertransformationen und Differentialgleichungen (Abschnitt 7.3) von großer Wichtigkeit sein.

Beweis: Wir verwenden die Definitionen (37)und (40). Außerdem werden wir bei Gelegenheit $1 = \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^{iky-iky}$ verwenden:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{(f \circledast g)(x)\right\}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} (f \circledast g)(x)\,\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\,g(x-y)\,\mathrm{d}y\mathrm{e}^{-ikx}1\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\,g(x-y)\,\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{e}^{iky-iky}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\,\mathrm{e}^{-iky} g(x-y)\,\mathrm{e}^{-ik(x-y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\,\mathrm{e}^{-iky} \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}} g(x-y)\,\mathrm{e}^{-ik(x-y)}\mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Eine Substitution $s := x - y$ mit $\mathrm{d}s = \mathrm{d}x$ liefert für den Klammerausdruck (das uneigentliche Integrationsintervall bleibt wieder invariant unter dieser Translation):

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{(f \circledast g)(x)\right\}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\,\mathrm{e}^{-iky} \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}} g(s)\,\mathrm{e}^{-iks}\mathrm{d}s \right\} \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}} g(s)\,\mathrm{e}^{-iks}\mathrm{d}s \right\} \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\,\mathrm{e}^{-iky}\mathrm{d}y \right\} \\
&= \sqrt{2\pi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} g(s)\,\mathrm{e}^{-iks}\mathrm{d}s \right\} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\,\mathrm{e}^{-iky}\mathrm{d}y \right\} \\
&= \sqrt{2\pi}\hat{f}(k)\,\hat{g}(k). \qquad \square
\end{aligned}$$

7.1.4 Theorem (*Fouriertransformation der Gaussfunktion*)

Betrachte die Gaussfunktion:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Die Gaussfunktion bleibt unter einer Fouriertransformation unverändert:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}k^2},$$

sie ist also die "Eigenfunktion" der Fouriertransformation.

Beweis: Einsetzen der Definitionen liefert:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \mathrm{e}^{-ikx} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2}x^2 + ikx\right)} \mathrm{d}x.$$

Nun können wir quadratisches Ergänzen im Exponenten versuchen:

$$\frac{1}{2}x^2 + ikx = \frac{1}{2}\left\{x^2 + 2ikx\right\} = \frac{1}{2}\left\{x + ik\right\}^2 + \frac{1}{2}k^2,$$

und somit gilt:

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\{x+ik\}^2 - \frac{1}{2}k^2} \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}k^2} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\{x+ik\}^2} \mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}k^2} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2} \mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}k^2} \frac{1}{2\pi} \sqrt{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}k^2}. \end{aligned} \qquad \square$$

7.2 Beispiele zum Berechnen der Fouriertransformation

In diesem Abschnitt wollen wir die Berechnung von Fouriertransformationen an einigen Beispielen veranschaulichen.

7.2.1 Beispiel: FT von $\mathbb{I}_{[a,b]}(x)$

Wir suchen die Fouriertransformation der Indikatorfunktion:

$$\mathbb{I}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{43}$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Anstatt die FT von (43) direkt zu berechnen, betrachten wir zunächst eine symmetrische Indikatorfunktion:

$$\mathbb{I}_{[-a,a]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{44}$$

wobei $a > 0$. Für diese Funktion lässt sich die FT ohne großen Aufwand berechnen:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{I}}_{[-a,a]}(k) &= \mathcal{F}\left\{\mathbb{I}_{[-a,a]}(x)\right\}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{[-a,a]}(x)\, \mathrm{e}^{-ikx} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-ikx} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{-ik} \mathrm{e}^{-ikx}\Big|_{-a}^{a} \\ &= -\frac{1}{ik\sqrt{2\pi}} \left\{\mathrm{e}^{-ika} - \mathrm{e}^{ika}\right\} = \frac{2}{k\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2i} \left\{\mathrm{e}^{ika} - \mathrm{e}^{-ika}\right\} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(ka)}{k}. \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\mathcal{F}\left\{\mathbb{I}_{[-a,a]}(x)\right\}(k)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(ka)}{k}.$$

Nun können wir aber Theorem 7.1.2 verwenden. Offensichtlich gilt nämlich:

$$[a,b]=\frac{a+b}{2}+\left[-\frac{b-a}{2},\frac{b-a}{2}\right],$$

und somit auch:

$$\mathbb{I}_{[a,b]}(x)=\mathbb{I}_{\left[\frac{b-a}{2},\frac{b-a}{2}\right]}\left(x-\frac{a+b}{2}\right).$$

Mit Theorem 7.1.2 (Eigenschaft 2.) folgt nun für $\tau:=-\frac{a+b}{2}$ und $c:=\frac{b-a}{2}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{\mathbb{I}_{[a,b]}(x)\right\}(k) &= \mathcal{F}\left\{\mathbb{I}_{[-c,c]}(x+\tau)\right\}(k)=\mathrm{e}^{i\tau k}\mathcal{F}\left\{\mathbb{I}_{[-c,c]}(x)\right\}(k)\\ &= \mathrm{e}^{i\tau k}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(kc)}{k}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{ik[a+b]}{2}}\frac{\sin\left(\frac{k[b-a]}{2}\right)}{k}.\end{aligned}$$

Somit haben wir die gefragte Fouriertransformation ermittelt:

$$\hat{\mathbb{I}}_{[a,b]}(k)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{ik[a+b]}{2}}\frac{\sin\left(\frac{k[b-a]}{2}\right)}{k}.$$

Bemerkung: Hier haben wir eine wichtige Strategie für die Berechnung von FT vorgestellt: Das Zurückführen auf einfachere (oder sogar schon bekannte) Rechnungen. Anstatt die Indikatorfunktion des asymmetrischen Intervalls direkt zu berechnen, haben wir die Fragestellung auf das Berechnen einer Indikatorfunktion mit symmetrischem Intervall - was viel einfacher ist - zurückgeführt. Schlussendlich haben wir die Eigenschaften der FT dazu benützt daraus das gefragte Resultat zu extrahieren.

7.2.2 Beispiel: FT der Dreiecksfunktion

Hier wollen wir die Fouriertransformation der Dreiecksfunktion:

$$f(x)=(1-|x|)\,\mathbb{I}_{[-1,1]}=\begin{cases}1-|x| & \text{für } -1\leq x\leq 1\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases}$$

berechnen. Einsetzen von $f(x)$ in Definition (37) liefert:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\hat{f}(k) &= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}\{f(x)\}(k) = \int_{\mathbb{R}} (1-|x|)\,\mathbb{I}_{[-1,1]}\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} (1-|x|)\,\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} 1\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{0} x\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{1} x\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{ik}\left\{\mathrm{e}^{-ik}-\mathrm{e}^{ik}\right\} - \frac{1}{ik}x\mathrm{e}^{-ikx}|_{-1}^{0} \\
&+ \frac{1}{ik}\int_{-1}^{0}\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x + \frac{1}{ik}x\mathrm{e}^{-ikx}|_{0}^{1} - \frac{1}{ik}\int_{0}^{1}\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{ik}\left\{\mathrm{e}^{ik}-\mathrm{e}^{-ik}\right\} - \frac{1}{ik}\mathrm{e}^{ik} + \frac{1}{ik}\mathrm{e}^{-ik} + \frac{1}{ik}\int_{-1}^{0}\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x - \frac{1}{ik}\int_{0}^{1}\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{ik}\int_{-1}^{0}\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x - \frac{1}{ik}\int_{0}^{1}\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x = \frac{1}{k^2}\mathrm{e}^{-ikx}|_{-1}^{0} - \frac{1}{k^2}\mathrm{e}^{-ikx}|_{0}^{1} \\
&= \frac{1}{k^2}\left(1-\mathrm{e}^{ik}-\mathrm{e}^{-ik}+1\right) = \frac{2}{k^2}\left(1-\frac{1}{2}\left\{\mathrm{e}^{ik}+\mathrm{e}^{-ik}\right\}\right) \\
&= \frac{2}{k^2}(1-\cos(k)) = \frac{4}{k^2}\sin^2\left(\frac{k}{2}\right).
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt, da $\sin^2(x) = \frac{1}{2}\{1-\cos(2x)\}$. Somit haben wir die FT der Dreicksfunktion gefunden:

$$\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2\sin^2\left(\frac{k}{2}\right)}{k^2}.$$

7.2.3 Beispiel: FT von $\mathrm{e}^{-|x|}$

Einsetzen der Definitionen liefert:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\hat{f}(k) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{(1-ik)x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(1+ik)x}\mathrm{d}x = \frac{1}{1-ik}\mathrm{e}^{(1-ik)x}|_{-\infty}^{0} \\
&- \frac{1}{1+ik}\mathrm{e}^{-(1+ik)x}|_{0}^{\infty} = \frac{1}{1-ik} - 0 - 0 + \frac{1}{1+ik} \\
&= \frac{1+ik+1-ik}{(1+ik)(1-ik)} = \frac{2}{1+k^2},
\end{aligned}$$

und somit gilt:

$$\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+k^2}. \tag{45}$$

7.3 Zurückführen unbekannter FT auf bekannte Transformationen

Das Berechnen einer Fouriertransformation involviert partielles Integrieren und kann schnell sehr anspruchsvoll werden. Deshalb sind Tricks sehr willkommen. Ein besonders wichtiger Trick ist das clevere Verwenden von Theorem 7.1.2 (wichtige Eigenschaften der FT). Diese Eigenschaften ermöglichen es nämlich manchmal das Berechnen einer FT auf eine altbekannte FT zurückzuführen. Wir wollen diese Methodik anhand von Beispielen untersuchen.

7.3.1 Beispiel: Berechnen der FT von $x\mathrm{e}^{-\lambda x^2}$

Hier gilt natürlich $\lambda > 0$. Wir können nun diese Funktion etwas umformen:

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-\lambda x^2} = x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2\lambda}x\right)^2} = -\frac{1}{2\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2\lambda}x\right)^2}.$$

Bezeichnen wir unsere wohlbekannte Gaußfunktion mit:

$$g(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2},$$

so gilt nun:

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{1}{2\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2\lambda}x\right)^2} = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2\lambda}x\right)^2} \\
&= -\frac{\sqrt{2\pi}}{2\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g\left(\sqrt{2\lambda}x\right).
\end{aligned}$$

Nun können wir die Eigenschaften der Fouriertransformation (Theorem 7.1.2) benützen um die gefragte Transformation zu berechnen:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= \mathcal{F}\{f(x)\}(k) = \mathcal{F}\left\{-\frac{\sqrt{2\pi}}{2\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g\left(\sqrt{2\lambda}x\right)\right\}(k) \\
&= -\frac{\sqrt{2\pi}}{2\lambda}\mathcal{F}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g\left(\sqrt{2\lambda}x\right)\right\}(k) \\
&= -\frac{\sqrt{2\pi}}{2\lambda}ik\mathcal{F}\left\{g\left(\sqrt{2\lambda}x\right)\right\}(k) \\
&= -\frac{\sqrt{2\pi}}{2\lambda}\frac{ik}{\left|\sqrt{2\lambda}\right|}\mathcal{F}\{g(x)\}\left(\frac{k}{\sqrt{2\lambda}}\right) \\
&= -\frac{\sqrt{2\pi}}{2\lambda}\frac{ik}{\sqrt{2\lambda}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{\sqrt{2\lambda}}\right)^2} \\
&= -\frac{ik}{2\lambda\sqrt{2\lambda}}\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{4\lambda}}.
\end{aligned}$$

Somit konnten wir die FT der gesuchten Funktion berechnen ohne eine einzige Integration durchzuführen. Das Resultat ist also:

$$\mathcal{F}\left\{x\mathrm{e}^{-\lambda x^2}\right\}(k) = -\frac{ik}{2\lambda\sqrt{2\lambda}}\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{4\lambda}}.$$

7.3.2 Beispiel: Rekonstruktion der Ursprunsfunktion aus $\hat{f}(k)$

Sei

$$\hat{f}(k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{a\cos(ka)}{k} - \frac{\sin(ka)}{k^2}\right\}.$$

Wir wollen daraus $f(x)$ ermitteln. Bei genauerem Hinsehen erkennen wir, dass

$$\hat{f}(k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{a\cos(ka)}{k} - \frac{\sin(ka)}{k^2}\right\} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin(ka)}{k}.$$

Wir defininieren nun

$$\hat{g}(k) := \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin(ka)}{k}.$$

Man bemerke, dass $\hat{g}(k)$ genau der Fouriertransformation einer uns bereits bekannten Funktion entspricht. In Beispiel 7.2.1 haben wir nämlich gezeigt, dass:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{\mathbb{I}_{[-a,a]}(x)\right\}(k) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin(ka)}{k} = \hat{g}(k) \\
&\Rightarrow\ g(x) = \mathbb{I}_{[-a,a]}(x)
\end{aligned}$$

Mit dieser Definition gilt also:

$$\hat{f}(k) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\hat{g}(k) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\mathcal{F}\{g(x)\}(k).$$

Diese Beobachtung hilft uns jetzt beim Berechnen von $f(x)$ immens weiter. Außerdem wissen wir von Theorem 7.1.2, dass die Fouriertransformation folgende Eigenschaft hat:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{xf(x)\}(k) &= i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\hat{f}(k) = i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\mathcal{F}\{f(x)\}(k) \\ &\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\mathcal{F}\{f(x)\}(k) = -i\mathcal{F}\{xf(x)\}(k). \end{aligned}$$

In unserem Fall bedeutet das:

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{f}(k)\right\}(x) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\hat{g}(k)\right\}(x) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\mathcal{F}\{g(x)\}(k)\right\}(x) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{-i\mathcal{F}\{xg(x)\}(k)\}(x) = -i\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{xg(x)\}(k)\}(x) = -ixg(x) \\ &= -ix\mathbb{I}_{[-a,a]}(x). \end{aligned}$$

Somit haben wir die Antwort auf unsere Frage gefunden. Eine direkte Berechnung der Fouriertransformation von $-ix\mathbb{I}_{[-a,a]}(x)$ führt übrigens auf dasselbe Ergebnis.

7.3.3 Beispiel: Berechnen von $f'(0)$ aus $\hat{f}(k)$

Es sei die Fouriertransformation einer Funktion gegeben:

$$\hat{f}(k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{a\cos(ka)}{k^2} - \frac{\sin(ka)}{k^3}\right\}.$$

Unsere Aufgabe besteht darin, $f'(0)$ zu berechnen. Zunächst bemerken wir, dass offenbar Folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \frac{1}{k}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{a\cos(ka)}{k} - \frac{\sin(ka)}{k^2}\right\} = \frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin(ka)}{k} \\ &= \frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\hat{g}(k), \end{aligned}$$

wobei $\hat{g}(k)$ erneut die Fouriertransformation von $g(x) = \mathbb{I}_{[-a,a]}(x)$ bezeichnet. Daher können wir die Resultate aus dem letzten Beispiel verwenden. Es gilt sicherlich:

$$f'(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(0) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right\}\right\}(0).$$

Nun wissen wir aber, dass die Fouriertransformation folgende Eigenschaft hat (Theorem 7.1.2):

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right\}(k) = ik\mathcal{F}\{f(x)\}(k).$$

Diese Eigenschaft können wir nun folgendermaßen ausnützen:

$$\begin{aligned} f^{'}(0) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right\}(k)\right\}(0) = \mathcal{F}^{-1}\left\{ik\mathcal{F}\left\{f(x)\right\}(k)\right\}(0) = \mathcal{F}^{-1}\left\{ik\hat{f}(k)\right\}(0) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{ik\frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\hat{g}(k)\right\}(0) = i\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{d}{dk}\mathcal{F}\left\{g(x)\right\}\right\}(0). \end{aligned}$$

Mit dem Resultat aus dem vorigen Beispiel:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{d}{dk}\mathcal{F}\left\{g(x)\right\}(k)\right\}(x) = \mathcal{F}^{-1}\left\{-i\mathcal{F}\left\{xg(x)\right\}(k)\right\}(x),$$

folgt daraus unmittelbar:

$$\begin{aligned} i\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\mathcal{F}\left\{g(x)\right\}(k)\right\}(0) &= i\mathcal{F}^{-1}\left\{-i\mathcal{F}\left\{xg(x)\right\}(k)\right\}(0) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}\left\{xg(x)\right\}(k)\right\}(0) \\ &= xg(x)\,|_{x=0} = x\mathbb{I}_{[-a,a]}(x)\,|_{x=0} = 0. \end{aligned}$$

Somit haben wir gezeigt, dass

$$f^{'}(0) = 0.$$

7.4 Fouriertransformationen und Differentialgleichungen

Eine der wichtigsten Eigenschaften der Fouriertransformation ist die Tatsache, dass sie Ableitungsoperatoren ($\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$) in Multiplikationsoperatoren (ik) verwandelt und umgekehrt (Theorem 7.1.2). Diese Eigenschaft ermöglicht folgende Strategie für das Lösen von gewöhnlichen DGL's:

- Die Fouriertransformation verwandelt jede gewöhnliche DGL in eine algebraische DGL.
- Die resultierende algebraische DGL kann gelöst werden.
- die Rücktransformation der algebraischen Lösung liefert die Lösung der DGL.

Die Fouriertransformation ist auch bei partiellen DGL's sehr nützlich, da wir dank ihr alle Ableitungen nach der x-Koordinate killen können.
Wie diese Strategien konkret aussehen, wollen wir nun an Beispielen behandeln.

7.4.1 Beispiel: Lösen der DGL $-\frac{\mathbf{d}^2}{\mathbf{d}_{x^2}}u(x) + u(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$ mithilfe der FT

Die Idee ist nun, wie bereits erwähnt, die Eigenschaften der FT auszunützen um die DGL in eine algebraische Gleichung zu verwandeln. Um das zu erreichen fouriertransformieren wir die gesamte Gleichung (das Gleichheitszeichen bleibt wegen der Injektivität der FT bestehen):

$$\mathcal{F}\left\{-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u(x)\right\}(k)+\mathcal{F}\{u(x)\}(k) = \mathcal{F}\left\{\mathrm{e}^{-|x|}\right\}(k). \tag{46}$$

Und nun benützen wir die wichtige Eigenschaft:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right\}(k)=ik\mathcal{F}\{f(x)\}(k),$$

aus Theorem 7.1.2 um die Ableitung auf der linken Seite loszuwerden:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u(x)\right\}(k) &= \mathcal{F}\left\{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x)\right]\right\}(k)=-ik\mathcal{F}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x)\right\}(k)\\ &= -(ik)^2\mathcal{F}\{u(x)\}(k)=k^2\hat{u}(k).\end{aligned}$$

Darüber hinaus kennen wir auch die linke Seite von Gleichung (45) aus Beispiel 7.2.3 (oder aus einer entsprechenden Tabelle):

$$\mathcal{F}\left\{\mathrm{e}^{-|x|}\right\}(k)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+k^2}.$$

Deshalb hat unsere fouriertransformierte DGL (46) folgende Form:

$$\begin{aligned}k^2\hat{u}(k)+\hat{u}(k) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+k^2}\\ \left(1+k^2\right)\hat{u}(k) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+k^2}\\ &\Rightarrow\quad \hat{u}(k)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\left(1+k^2\right)^2}.\end{aligned}$$

Die FT hat die DGL tatsächlich in eine algebraische Gleichung verwandelt, die wir schnell und einfach lösen konnten. Allerdings müssen wir diese Lösung nun noch zurücktransformieren. Für diese Rechnung lohnt es sich folgende Kurznotation einzuführen:

$$f(x):=\mathrm{e}^{-|x|}\quad\text{und somit}\quad\hat{f}(k)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+k^2}.$$

Denn mit dieser Notation gilt offenbar:

$$\hat{u}(k)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\left(1+k^2\right)^2}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+k^2}\right)^2=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\hat{f}(k)\hat{f}(k).$$

Zum Berechnen von $u(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{u}(k)\}(x)$ können wir nun das Faltungstheorem (42) verwenden:

$$\begin{aligned}
u(x) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\hat{f}(k)\hat{f}(k)\right\}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{f}(k)\hat{f}(k)\right\}(x) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f \circledast f)(x) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} f(y) f(x-y)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-|y|}\mathrm{e}^{-|x-y|}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-|y|-|x-y|}\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Nun müssen wir "nur mehr" dieses Integral berechnen. Offenbar gilt für $x > 0$:

$$\begin{aligned}
2u(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-|y|-|x-y|}\mathrm{d}y \\
&= \int\limits_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{y+(y-x)}\mathrm{d}y + \int\limits_{0}^{x} \mathrm{e}^{-y+(y-x)}\mathrm{d}y + \int\limits_{x}^{\infty} \mathrm{e}^{-y-(y-x)}\mathrm{d}y \\
&= \mathrm{e}^{-x}\int\limits_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2y}\mathrm{d}y + \mathrm{e}^{-x}\int\limits_{0}^{x} 1\mathrm{d}y + \mathrm{e}^{x}\int\limits_{x}^{\infty} \mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}y \\
&= \mathrm{e}^{-x}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2y}|_{-\infty}^{0} + \mathrm{e}^{-x}y|_0^x - \mathrm{e}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2y}|_x^{\infty} \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(1-0) + \left(x\mathrm{e}^{-x} - 0\right) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\left(0 - \mathrm{e}^{-2x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} = (1+x)\,\mathrm{e}^{-x}.
\end{aligned}$$

Ähnliche Rechnungen für $x < 0$ und für $x = 0$ liefern folgende Ergebnisse:

$$\begin{aligned}
x > 0: &\qquad u(x) = \frac{1}{2}(1+x)\,\mathrm{e}^{-x} \\
x = 0: &\qquad u(x) = \frac{1}{2} \\
x < 0: &\qquad u(x) = \frac{1}{2}(1-x)\,\mathrm{e}^{x},
\end{aligned}$$

woraus wir folgende Gesamtlösung extrahieren können:

$$u(x) = \frac{1}{2}(1+|x|)\,\mathrm{e}^{-|x|}.$$

7.4.2 Beispiel: Löse $\triangle u(x,y)=0$ mit Randbedingung $u(x,0)=f(x)$

Wir betrachten folgende 2-dimensionale partielle Differentialgleichung für $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ mit $y\geq 0$:

$$\begin{aligned}\triangle u(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)=0 \qquad (47)\\ u(x,0) &= f(x), \qquad (48)\end{aligned}$$

wobei $f(x):\ \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ eine beliebige fouriertransformierbare Funktion darstellt. Auch für diese partielle DGL ist die Fouriertransformation sehr nützlich. Fouriertransformieren erlaubt es uns nämlich, die x-Ableitung loszuwerden und die PDE so in eine gewöhnliche DGL zu verwandeln:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\triangle u(x,y)\}(k,y) &= \mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y)\right\}(k,y)+\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)\right\}(k,y)\\ &= (ik)^2\,\mathcal{F}\{u(x,y)\}(k,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\mathcal{F}\{u(x,y)\}(k,y)\\ &= -k^2\hat{u}(k,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\hat{u}(k,y)=0\\ &= -|k|^2\,\hat{u}(k,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\hat{u}(k,y)=0.\end{aligned}$$

Hier haben wir in der letzten Zeile Betragsstriche eingeführt um uns das Leben etwas einfacher zu machen. Wie sich nämlich herausstellen wird, bekämen wir lästige Definitinsprobleme, wenn wir diesen Schritt auslassen würden. Unser Trick ist auf jeden Fall erlaubt, da Betragsstriche nichts an der obigen FT ($k^2=|k|^2$ gilt für alle reellen Zahlen) ändern. Das liefert uns folgende gewöhnliche Differentialgleichung in y:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\hat{u}(k,y)=|k|^2\,\hat{u}(k,y),$$

die wir sofort lösen können:

$$\hat{u}(k,y)=A\mathrm{e}^{-|k|y}+B\mathrm{e}^{|k|y}.$$

Wie man leicht sehen kann, explodiert der zweite Teil dieser Lösung sobald $|k|$ groß wird (wir haben ja $y\geq 0$). Das ist aber sehr schlecht, da es eine Rücktransformation unmöglich macht (Bei der Rücktransformation wird über k von $-\infty$ bis ∞ integriert). Deshalb muss $B=0$ gelten und somit:

$$\hat{u}(k,y)=A\mathrm{e}^{-|k|y}.$$

Die Konstante A lässt sich aus Randbedingung (48) bestimmen. Fouriertransformieren wir sie, erhalten wir:

$$\hat{u}(k,0)=\hat{f}(k).$$

Diese Gleichung impliziert sofort:

$$\hat{u}(k,0) \quad = \quad A\mathrm{e}^{-|k|y}|_{k=0} = A = \hat{f}(k),$$

und wir haben die fouriertransformierte Lösung gefunden:

$$\hat{u}(k,y) = \hat{f}(k)\,\mathrm{e}^{-|k|y}.$$

Um die eigentliche Lösung der DGL zu erhalten, müssen wir diese Funktion noch rücktransformieren. Hierfür nützen wir eine Gleichung, die ich aus Übung 9, Aufgabe 2)a) entnommen habe. Für

$$g(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{x^2+y^2},$$

gilt nämlich:

$$e^{-|k|y} = \mathcal{F}\{g(x,y)\}(k,y) = \hat{g}(k,y).$$

Somit gilt für unsere Lösung:

$$u(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{u}(k,y)\}(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{f}(k)\,\hat{g}(k,y)\right\}(x,y).$$

Und das schreit nach unserem alten Freund, dem Faltungstheorem (42):

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{f}(k)\,\hat{g}(k,y)\right\}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f \ast g)(x,y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(\xi)\,g(x-\xi,y)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(\xi)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(\xi)\,\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Und das ist die Lösung von (47) für beliebige Funktionen $f(x)$.

7.4.3 Beispiel: Lösen der Wellengleichung mithilfe der FT

Wir betrachten wieder einmal die homogene Wellengleichung:

$$\begin{aligned} \Box u(x,t) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R},\, \forall t > 0 \\ u(x,0) &= f(x) \qquad \forall t > 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}u(x,0) &= g(x) \qquad \forall t > 0. \end{aligned}$$

Mithilfe der Fouriertransformation können wir die x-Ableitung loswerden und die PDE in eine gewöhnliche DGL verwandeln. Die t-abhängigen Ausdrücke bleiben davon völlig unbeindruckt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{u}(k,t)+c^2|k|^2\hat{u}(k,t) &= 0\\
\hat{u}(k,0) &= \hat{f}(k)\\
\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(k,0) &= \hat{g}(k)\,.
\end{aligned}$$

Ich habe hier die Betragsstriche eingeführt weil $k^2 = |k|^2$ gilt und uns das eventuelle Definitionsprobleme erspart (die Lösung unserer DGL ist für $k < 0$ nämlich nicht definiert!) Die erste Zeile entspricht einer bekannten gewöhnlichen DGL in t, dessen Lösung uns wohlvertraut ist:

$$\hat{u}(k,t) = A(k)\cos(c|k|t) + B(k)\sin(c|k|t)\,.$$

Da die DGL uns nichts über die k-Abhängigkeiten sagt, müssen wir davon ausgehen, dass die "Konstanten" von k abhängen (daher $A(k)$ und $B(k)$). Anpassen an die erste Randbedingung liefert:

$$\hat{u}(k,0) = A(k) \overset{!}{=} \hat{f}(k)\,,$$

wohingegen Anpassen an die zweite Randbedingung folgendes liefert:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(k,0) &= \frac{\partial}{\partial t}\left\{A(k)\cos(c|k|t)+B(k)\sin(c|k|t)\right\}|_{t=0}\\
&= c|k|B(k) \overset{!}{=} \hat{g}(k)\,.
\end{aligned}$$

Somit haben wir die Konstanten bestimmt:

$$\begin{aligned}
A(k) &= \hat{f}(k)\\
B(k) &= \frac{1}{c|k|}\hat{g}(k)\,,
\end{aligned}$$

sie hängen tatsächlich von k ab. Die fouriertransformierte Lösung unsere Problems lautet somit:

$$\hat{u}(k,t) = \hat{f}(k)\cos(c|k|t) + \frac{1}{c|k|}\hat{g}(k)\sin(c|k|t)\,.$$

Diese Lösung müssten wir allerdings noch zurücktransformieren. Allerdings ist das etwas mühsam und wir begnügen uns hier mit einem Verweis auf die Vorlesungsnotizen: Lecture 10, page 86.

8 Die Laplacegleichung

In diesem Kapitel betrachten wir eine besonders wichtige partielle Differentialgleichung - die Laplacegleichung. Sie hat stets folgende Form:

$$\triangle u = f, \tag{49}$$

wobei die Dimension beliebig sein kann. Wir haben bereits Möglichkeiten kennen gelernt, diese DGL zu lösen. Dennoch widmen wir dieser Gleichung ein eigenes Kapitel, da sie meist in Polar- oder Kugelkoordinaten formuliert ist.

8.1 Polarkoordinaten

8.1.1 Definition

Polarkoordinaten sind ein alternatives Koordinatensystem für $\mathbb{R}^2$. Im Gegensatz zu den kartesischen Koordinaten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sind die Polarkoordinaten $(r, \phi) \in \mathbb{R}^2$ sehr gut an etwaige Rotationssymmetrien angepasst. Ihre Beziehung zu den kartesischen Koordinaten sind durch folgende Formeln gegeben:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} = |\vec{x}| && (50) \\ \phi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right), && (51) \end{aligned}$$

respektive:

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\phi) && (52) \\ y &= r\sin(\phi). && (53) \end{aligned}$$

Will man eine Funktion $f(x, y)$, welche in kartesischen Koordinaten gegeben ist, in Polarkoordinaten ausdrücken, so ersetzt man x und y in der Funktion durch die entsprechenden Polarkoorinatenausdrücke:

$$f(x, y) \longrightarrow f(r\cos(\phi), r\sin(\phi)). \tag{54}$$

Zum Beispiel gilt für $f(x, y) = x^2 + y^2$:

$$f(r, \phi) = f(r\cos(\phi), r\sin(\phi)) = r^2\cos^2(\phi) + r^2\sin^2(\phi) = r^2.$$

Diese Funktion sieht also in Polarkoordinaten "netter" aus als in Kartesischen.

8.1.2 Integrationsmaß in Polarkoordinaten

In kartesischen Koordinaten ist das Integrationsmaß des $\mathbb{R}^2$ standardmäßig durch

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

gegeben. Es ist offensichtlich sowohl translationsinvariant in x als auch in y:

$$\begin{aligned} \int_{x_0+c_x}^{x_1+c_x}\int_{y_0}^{y_1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} \mathrm{d}(x + c_x)\,\mathrm{d}y = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{und} \\ \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0+c_y}^{y_1+c_y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} \mathrm{d}x\mathrm{d}(y + c_y) = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Im Gegensatz dazu ist das Integrationsmaß in Polarkoordinaten durch

$$r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi$$

gegeben (r ist hier die Jacobideterminante der Transformationsmatrix). Dieses Integrationsmaß hängt explizit von r ab und ist daher nur mehr translationsinvariant in ϕ, nicht mehr in r:

$$\begin{aligned}
\int_{r_0}^{r_1}\int_{\phi_0+c_\phi}^{\phi_1+c_\phi} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi &= \int_{r_0}^{r_1}\int_{\phi_0}^{\phi_1} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\left(\phi+c_\phi\right) = \int_{r_0}^{r_1}\int_{\phi_0}^{\phi_1} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi \quad \text{aber} \\
\int_{r_0+c_r}^{r_1+c_r}\int_{\phi_0}^{\phi_1} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi &= \int_{r_0}^{r_1}\int_{\phi_0}^{\phi_1} \left(r+c_r\right)\mathrm{d}\left(r+c_r\right)\mathrm{d}\phi = \int_{r_0}^{r_1}\int_{\phi_0}^{\phi_1} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi + c_r\int_{r_0}^{r_1}\int_{\phi_0}^{\phi_1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi \\
&\neq \int_{r_0}^{r_1}\int_{\phi_0}^{\phi_1} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi.
\end{aligned}$$

Will man eine Funktion f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrieren, so kann man dies sowohl in kartesischen- als auch in Polarkoordinaten tun:

$$\iint f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint f\left(r,\phi\right)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi,$$

wobei der Zusammenhang zwischen $f\left(x,y\right)$ und $f\left(r,\phi\right)$ durch (54) gegeben ist. Selbstverständlich müssen auch die Integrationsgrenzen aufeinander abgestimmt werden.

8.1.3 Laplaceoperator in Polarkoordinaten

Die Laplacegleichung (49) - nomen est omen - hängt essentiell vom Laplaceoperator $\triangle$ ab. $\triangle$ dürfte euch aus der Quantenmechanik gut bekannt sein und ist in kartesischen $\mathbb{R}^2$-Koordinaten folgendermaßen definiert:

$$\triangle_{x,y} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{55}$$

In Polarkoordinaten hingegen hat er folgende Form:

$$\triangle_{r,\phi} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \tag{56}$$

Dieser (offensichtlicht andere) Ausdruck kann aus (55) mithilfe der Kettenregel hergeleitet werden. Es gilt nämlich mit $r = \sqrt{x^2+y^2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \arctan\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \phi} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi} \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \arctan\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \phi} \\
&= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{y}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial}{\partial \phi} \\
&+ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \phi} \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{x^2}{r^3}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2xy}{r^4}\frac{\partial}{\partial \phi} \\
&+ \frac{x}{r}\left\{\frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\right\}\frac{\partial}{\partial r} \\
&- \frac{y}{r^2}\left\{\frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\right\}\frac{\partial}{\partial \phi} \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{x^2}{r^3}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2xy}{r^4}\frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{xy}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \phi} \\
&- \frac{xy}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{y^2}{r^4}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2},
\end{aligned}$$

und auf ähnliche Art und Weise:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial}{\partial \phi} \\
&+ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \phi} \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{y^2}{r^3}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2xy}{r^4}\frac{\partial}{\partial \phi} \\
&+ \frac{y}{r}\left\{\frac{y}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\right\}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{x}{r^2}\left\{\frac{y}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\right\}\frac{\partial}{\partial \phi} \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{y^2}{r^3}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2xy}{r^4}\frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{xy}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \phi} \\
&\quad + \frac{xy}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{x^2}{r^4}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.
\end{aligned}$$

Mit dieser Rechnung erhalten wir für den Laplaceoperator:

$$\begin{aligned}
\triangle &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{x^2}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{2xy}{r^4}\frac{\partial}{\partial \phi}+\frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{xy}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\partial}{\partial \phi}\frac{xy}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \phi}+\frac{y^2}{r^4}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \\
&+ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{y^2}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{2xy}{r^4}\frac{\partial}{\partial \phi}+\frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{xy}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial \phi}\frac{xy}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \phi}+\frac{x^2}{r^4}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \\
&= \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{x^2+y^2}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{x^2+y^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{x^2+y^2}{r^4}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \\
&= \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{r^2}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{r^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{r^2}{r^4}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \qquad \square
\end{aligned}$$

8.1.4 Randbedingungen in Polarkoordinaten

Polarkoordinaten werden mit Vorteil immer dann verwendet, wenn die Symmetrie eines Problems rotationssymmetrisch ist. Dies ist in sehr vielen physikalischen Problemen der Fall, da sehr oft entweder die Randbedingungen, oder die auftretenden Kräfte (e.g.: Gravitationskraft, Coulombkraft) rotationssymmetrisch sind. Für rotationssymmetrische Randbedingnungen wird oft folgende Notation verwendet:

- $B_r\left((x_0,y_0)\right)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2\leq r^2\right\}$:
  $B_r\left((x_0,y_0)\right)$ bezeichnet die abgeschlossene Kreisscheibe mit Mittelpunkt in (x_0,y_0) und Radius r

- $\partial B_r\left((x_0,y_0)\right)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2= r^2\right\}$:
  $\partial B_r\left((x_0,y_0)\right)$ steht für den Rand der Kreisscheibe $B_r\left((x_0,y_0)\right)$.

Ein typisches Beispiel für diese Notation ist $\partial B_1(0)$. Diese Menge beschreibt den Kreis mit Radius 1 um den Ursprung - also den Einheitskreis. In Polarkoordinaten lässt sich diese Menge besonders einfach parametrisieren. Es gilt nämlich für eine auf diese Menge eingeschränkte Funktion $u(r,\phi)$

$$u(r,\phi)\,|_{\partial B_1(0)}=u(1,\phi)\;\;\phi\in[0,2\pi]\,.$$

8.1.5 Beispiel: Lösen der homogenen Laplacegleichung (Poissongleichung) in Polarkoordinaten

Die homogene Laplacegleichung:

$$\triangle u=0, \tag{57}$$

ist in der Physik so wichtig, dass sie einen eigenen Namen hat: <u>die Poissongleichung</u>. In diesem Abschnitt wollen wir anhand eines typischen Beispiels zeigen, wie man eine solche Gleichung mit Randbedingungen löst. Dabei werden wir wieder einmal einen Separationsansatz machen. Doch nun zum Beispiel. Betrachte folgende Gleichung für eine Funktion $u(r,\phi)$ in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} \Delta u(r,\phi) &= 0 \\ u(1,\phi) &= 1+\cos(3\phi) \quad \forall \phi \in [0,2\pi]. \end{aligned}$$

Aus Formel (56) wissen wir, dass der Laplaceoperator in Polarkoordinaten folgende Form annimmt:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die Differentialgleichung ein, so erhalten wir folgende Gleichung:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}u(r,\phi) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}u(r,\phi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}u(r,\phi) = 0. \tag{58}$$

Bevor wir mit der eigentlichen Lösung der Gleichung beginnen, plädieren wir dafür, die Konstante 1 in der Randbedingung loszuwerden (sie würde sonst an anderer Stelle stören). Daher spalten wir die Lösung u in einen homogenen und einen partikulären Teil auf:

$$u(r,\phi) = u_h(r,\phi) + u_p(r,\phi).$$

Offenbar ist jede konstante Funktion:

$$u_p(r,\phi) = d,$$

eine partikuläre Lösung von (58) ($\Delta u_p = 0$). Entscheiden wir uns für so eine partikuläre Lösung, muss die Randbedingung für das homogene Problem modifiziert werden. Und genau das wollen wir bezwecken. Schließlich gilt ja:

$$\begin{aligned} u(1,\phi) &= u_h(1,\phi) + u_p(1,\phi) = u_h(1,\phi) + d \\ &\Rightarrow u_h(1,\phi) = u(1,\phi) - d = 1+\cos(3\phi) - d. \end{aligned}$$

Setzen wir nun $d = 1$, also

$$u_p(r,\phi) = 1, \tag{59}$$

dann ergibt sich für die homogene Lösung folgendes Problem

$$\Delta u_h(r,\phi) = 0 \tag{60}$$

$$u_h(1,\phi) = \cos(3\phi) \quad \forall \phi \in [0,2\pi]. \tag{61}$$

Gleichung (60) können wir mithilfe eines Separationsansatzes aufspalten. Wir machen daher folgenden Ansatz:

$$u_h(r,\phi) = R(r)\,\Phi(\phi). \tag{62}$$

Dann folgt für die Gleichung

$$R^{''}(r)\,\Phi(\phi) + \frac{1}{r}R^{'}(r)\,\Phi(\phi) + \frac{1}{r^2}R(r)\,\Phi^{''}(\phi) = 0.$$

Diesen Ausdruck können wir nun ein wenig umsortieren (multipliziere mit r^2, dividiere durch $R(r)$ und $\Phi(\phi)$ und bringe $\Phi^{''}(\phi)$ auf die andere Seite), sodass folgender Ausdruck entsteht:

$$\frac{1}{R(r)}\left\{r^2 R^{''}(r) + rR^{'}(r)\right\} = -\frac{\Phi^{''}(\phi)}{\Phi(\phi)}.$$

Von der Theorie des Seperationsansatzes wissen wir, dass diese Gleichheit nur dann für beliebige r und ϕ gelten kann, wenn beide Seiten einer Konstante $-\omega^2$ gleichen. Mit diesem Argument und der Randbedingung (61) erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -\omega^2\Phi(\phi) &= \Phi^{''}(\phi) && (63)\\ \omega^2 R(r) &= r^2 R^{''}(r) + rR^{'}(r) && (64)\\ R(1)\,\Phi(\phi) &= \cos(3\phi) \quad \forall\phi \in [0, 2\pi]. && (65)\end{aligned}$$

Konzentrieren wir uns zunächst auf Gleichung (63). Sie ist uns wohlbekannt und wir wissen, dass sie 3 verschiedene Lösungen haben kann (abhängig von der Natur von $-\omega^2$):

$$\begin{aligned} \omega^2 &> 0: \ \Phi(\phi) = a\cos(\omega\phi) + b\sin(\omega\phi)\\ \omega^2 &= 0: \ \Phi(\phi) = a\phi + b\\ \omega^2 &< 0: \ \Phi(\phi) = a\cosh(\omega\phi) + b\sinh(\omega\phi).\end{aligned}$$

Tatsächlich kommt nur die erste Möglichkeit in Frage. Um dies zu sehen, bemerken wir, dass jede stetige Funktion $f(r,\phi)$ 2π-periodisch bezüglich ϕ sein muss. Fängt man nämlich in (r_0, ϕ_0) an und läuft einmal im Kreis herum (halte den Radius konstant und ändere ϕ), so erreicht man nach einer Drehung von 2π wieder den Anfangspunkt (r_0, ϕ_0). Dies bedeutet:

$$f(r_0, \phi_0 + 2\pi) = f(r_0, \phi_0), \tag{66}$$

muss für jede stetige Funktion f erfüllt sein. Insbesondere muss also unsere Lösung $u_h(r,\phi)$ periodisch sein. Das bedeutet also:

$$u_h(r, \phi + 2\pi) = u_h(r,\phi) \Longrightarrow \Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi).$$

Und diese Randbedingung erlaubt eben nur die erste der obigen Lösungen:

$$\Phi_n(\phi) = a\cos(\omega\phi) + b\sin(\omega\phi). \tag{67}$$

Diese Funktion kann darüber hinaus nur 2π-periodisch sein, wenn ω eine ganze Zahl ist. Somit folgt aus (66) zusätzlich:

$$\omega = n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

n legt also die Löusung Lösung des Winkelteils (67) fest und diese schränkt die Separationskonstante $-\omega^2$ auf $-n^2$ ein. Wir bezeichnen diese Lösung mit $\Phi_n(\phi)$ um ihre Abhängigkeit von n explizit zu vermerken:

$$\Phi(\phi) = a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi). \tag{68}$$

Die Einschränkung $\omega = n$ hat auch einen Einfluss auf die Radialgleichung (64), weshalb wir ihre Lösung von nun an mit $R_n(r)$ bezeichnen. Sie erhält folgende Form:

$$n^2 R_n(r) = r^2 R_n^{''}(r) + r R_n^{'}(r) \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{69}$$

Diese gewöhnliche DGL können wir durch einen Euleransatz ($r = ar^p$) lösen:

$$\begin{aligned} R_n(r) &= ar^p \\ R_n^{'}(r) &= par^{p-1} \\ R_n^{''}(r) &= p(p-1)\,ar^{p-2}. \end{aligned}$$

Setzen wir diesen Ansatz in (69) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 &= r^2 R_n^{''}(r) + r R_n^{'}(r) - n^2 R_n(r) \\ &= r^2 p(p-1)\,ar^{p-2} + rpar^{p-1} - n^2 ar^p \\ &= a\left\{p(p-1) + p - n^2\right\} r^p. \end{aligned}$$

Diese DGL muss $\forall r$ erfüllt sein und für jede nichttriviale Lösung muss daher gelten:

$$p(p-1) + p - n^2 = p^2 - n^2 \stackrel{!}{=} 0.$$

Die Lösung dieser algebraischen Gleichung ist offensichtlich durch $p = \pm n$ gegeben. Somit war der Euleransatz erfolgreich und wir haben die Lösung von (69) gefunden:

$$R_n(r) = \frac{c_n}{r^n} + d_n r^n. \tag{70}$$

Der erste Term ($\frac{c}{r^n}$) explodiert für $r \to 0$. Dies wäre jedoch ein unvernünftiges (unphysikalisches) Verhalten und daher muss $c = 0$ gelten. Somit vereinfacht sich (70) und zusammen mit (68) erhalten wir folgende Lösungen:

$$\begin{aligned} R_n(r) &= d_n r \\ \Phi_n(\phi) &= a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi). \end{aligned}$$

Gemäß des Separationsansatzes (62) entspricht die zugehörige Gesamtösung $u_n(r, \phi)$ dem Produkt dieser beiden Lösungen:

$$u_n(r, \phi) = a_n d_n r^n \cos(n\phi) + b_n d_n \sin(n\phi) =: A_n r^n \cos(n\phi) + B_n r^n \sin(n\phi),$$

wobei wir die auftetenden Konstanten zusammengeführt haben ($A_n := a_n d_n$ und $B_n := b_n d_n$). Für $n = 1, 2, \ldots$ ist jedes $u_n(r, \phi)$ eine mögliche Lösung der

Differentialgleichung. Gemäß dem Superpositionsprinzip entspricht die allgemeine homogene Lösung $u_h(r,\phi)$ von (60) einer beliebigen Linearkombination aller möglichen Lösungen:

$$u_h = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \cos(n\phi) + B_n r^n \sin(n\phi) . \tag{71}$$

Glücklicherweise brauchen wir bei weitem nicht alle diese Terme zu berücksichtigen, da die homogene Randbedingung (61) diese Summe beträchtlich einschränkt. Wir erinnern uns, dass diese (modifizierte) Randbedingungen durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$u_h(1,\phi) = R(1)\,\Phi(\phi) = \cos(3\phi) .$$

Für unsere homogene Lösung gilt:

$$u_h(1,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\phi) + B_n \sin(n\phi) .$$

Somit stellen wir mit einem Koeffizientenvergleich sofort fest, dass $A_3 = 1$ und $A_n = B_n = 0$ sonst gelten muss. Die Lösung unseres homogenen Problems (60) ist also durch folgende Funktion gegeben:

$$u_h(r,\phi) = r^3 \cos(3\phi) .$$

Das Endresultat erhalten wir über:

$$u(r,\phi) = u_h(r,\phi) + u_p(r,\phi) ,$$

wobei wir an die partikuläre Lösung erinnern:

$$u_p(r,\phi) = 1.$$

Somit gilt:

$$u(r,\phi) = u_h(r,\phi) + u_p(r,\phi) = r^3 \cos(3\phi) + 1 \tag{72}$$

Mithilfe des Additionstheorems $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$ können wir dieses Resultat noch in kartesische Koordinaten umeschreiben:

$$\begin{aligned} r^3 \cos(3\phi) + 1 &= 4r^3 \cos^3(\phi) - 3r^3 \cos(\phi) + 1 = 4\{r\cos(\phi)\}^3 - 3r^2\{r\cos(\phi)\} + 1 \\ &= 4x^3 - 3\left(x^2 + y^2\right)x = x^3 - 3xy^2 + 1. \end{aligned}$$

Also erhält unsere Lösung (72) in kartesischen Koordinaten folgende Form:

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 1$$

Es ist sofort ersichtlich, dass $\Delta u(x,y) = 0$ gilt, aber die Tatsache, dass die Randbedingung ($u(x,y) = 1 + \cos\left\{3\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right\}$ auf $\partial B_1(0)$) erfüllt ist, ist kaum mehr ersichtlich.

8.1.6 Beispiel: Lösen der inhomogenen Laplacegleichung in Polarkoordinaten

Wir betrachten folgende Gleichung für eine Funktion $u(r,\phi)$ in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}\Delta u(r,\phi) &= r\\ u(1,\phi) &= 0.\end{aligned}$$

Im Gegensatz zum vorigen Beispiel ist das eine inhomogene Differentialgleichung. Wir können sie jedoch auf eine homogene Gleichung ($\Delta u = 0$) zurückführen indem wir eine partikuläre Lösung des Problems finden. Dabei nützen wir wieder einmal aus, dass gilt:

$$u(r,\phi) = u_h(r,\phi) + u_p(r,\phi),$$

wobei u_p für eine beliebige Speziallösung des Problems $\Delta u_p = r$ steht. Explizit lautet diese Gleichung:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}u_p(r,\phi) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}u_p(r,\phi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}u_p(r,\phi) = r.$$

Da die rechte Seite keine explizite ϕ-Abhängigkeit hat, probieren wir folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned}u_p(r,\phi) &= ar^3 + br^2 + cr + d\\ u_p^{'}(r,\phi) &= 3ar^2 + 2br + c\\ u_p^{''}(r,\phi) &= 6ar + 2b\end{aligned}$$

Wir haben diesen Ansatz gewählt, weil er von der Art des Störterms ist. Eingesetzt in die DGL ergibt das

$$\begin{aligned}(6ar+2b) + \frac{1}{r}\left(3ar^2 + 2br + c\right) &= r \quad |.r\\ r(6ar+2b) + \left(3ar^2 + 2br + c\right) &= r^2\\ \Rightarrow (6a+3a)r^2 + (2b+2b)r + c &= r^2.\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $a = \frac{1}{9}$ und $b = c = 0$. d unterliegt keiner Bedingung und kann frei gewählt werden. Unsere partikuläre Lösung hat somit folgende Form:

$$u_p(r,\phi) = \frac{1}{9}r^3 + d.$$

Nun können wir uns auf das homogene Problem konzentrieren. Da jedoch $u_h(r,\phi) = u(r,\phi) - u_p(r,\phi)$ gilt, dürfen wir nicht vergessen, dass sich die Randbedingung durch unsere partikuläre Lösung ändert:

$$\begin{aligned}0 &= u(1,\phi)\\ \Rightarrow 0 &= u_h(1,\phi) + u_p(1,\phi)\\ \Rightarrow u_h(1,\phi) &= 0 - u_p(1,\phi) = -\frac{1}{9} - d.\end{aligned}$$

Die Randbedingung für die homogene Lösung lautet also:

$$u_h(1,\phi) = -\frac{1}{9} - d.$$

Jetzt können wir allerdings ausnützen, dass wir den Parameter d frei bestimmen können. Setzen wir nämlich $d = -\frac{1}{9}$, so verschwindet die rechte Seite und wir haben ein denkbar einfaches homogenes Problem:

$$\begin{aligned} \Delta u_h(r,\phi) &= 0 \\ u_h(1,\phi) &= 0. \end{aligned}$$

Dieses homogene Gleichungssystem können nun genauso lösen wie im letzten Beispiel (8.1.4). Dabei stellt sich heraus (Maximumprinzip), dass die einzig mögliche Lösung trivial ist:

$$u_h(r,\phi) = 0.$$

Mit dieser Erkenntnis erhalten wir die Gesamtlösung der Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} u(r,\phi) &= u_h(r,\phi) + u_p(r,\phi) = 0 + \frac{1}{9}r^3 - \frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{9}r^3 - \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Im Prinzip hätten wir diese Lösung allein durch cleveres Hinsehen erraten können. Allerdings ist durch bloßes Hinsehen alleine noch überhaupt nicht klar, dass diese Lösung tatsächlich die allgemeinst mögliche Lösung dieses Problems ist.

8.2 Kugelkoordinaten

8.2.1 Definition

Kugelkoordinaten sind das Analogon von Polarkoordinaten in 3 Dimensionen ($\mathbb{R}^3$):

$$\begin{aligned} r &\in [0,\infty[\\ \theta &\in [0,\pi] \\ \phi &\in [0,2\pi[\,. \end{aligned}$$

Ihre Beziehungen zu den kartesischen Koordinaten x, y und z sind durch folgende Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} = |\vec{x}| \\ \theta &= \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) \\ \phi &= \begin{cases} \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{falls } x > 0 \\ \operatorname{sgn}(y)\,\frac{\pi}{2} & \text{falls } x = 0 \\ \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \pi & \text{falls } x < 0 \text{und } y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{x}{y}\right) - \pi & \text{falls } x < 0 \text{und } y < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

und anders herum (was viel wichtiger ist):

$$\begin{aligned} x &= r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ y &= r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ z &= r\cos(\theta). \end{aligned}$$

8.2.2 Integrationsmaß in Kugelkoordinaten

In $\mathbb{R}^3$ ist das Standardintegrationsmaß durch

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

gegeben und ist translationsinvariant (das kann man völlig analog zum 2D-Fall zeigen). In Kugelkoordinaten beträgt das Integrationsmaß hingegen:

$$r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi.$$

Es ist offensichtlich lediglich bezüglich ϕ translationsinvariant. Dementsprechend gilt für beliebige integrable Funktionen $f(x,y,z)$:

$$\iiint f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \to \iiint f(r,\theta,\phi)\,r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi,$$

wobei die Integrationsgrenzen natürlich entsprechend angepasst werden müssen. Die Zuordnung $f(x,y,z)\to f(r,\theta,\phi)$ geschieht wie im 2D-Fall über:

$$f(r,\theta,\phi) = f(r\sin(\theta)\cos(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), r\cos(\theta)).$$

8.2.3 Laplaceoperator in Kugelkoordinaten

Der Laplaceoperator ist in $\mathbb{R}^3$ folgendermaßen definiert:

$$\triangle_{r,\theta,\phi} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}. \tag{73}$$

Dieser Ausdruck ist um einiges komplizierter als der zweidimensionale Laplaceoperator (56). Dementsprechend sind auch die resultierenden DGL's schnell kompliziert und übersteigen daher in den meisten Fällen das Niveau der Vorlesung. Wir beschränken uns daher hier auf den Verweis auf die berühmteste Lösung einer derartigen Differentialgleichung:

Das Wasserstoffatom in der Quantenmechanik.

8.3 Harmonische Funktionen

8.3.1 Definition

Sei $U \in \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt harmonisch, falls sie folgende Eigenschaft erfüllt:

$$\Delta f = 0, \tag{74}$$

wobei $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ den Laplaceoperator in n Dimensionen bezeichnet.
Bemerkung: Harmonische Funktion in $\mathbb{R}^2$ haben eine sehr enge Verbindung zu komplex differenzierbaren (holomorphen) Funktionen in $\mathbb{C}$. Komplex differenzierbare Funktionen sind in viel "netter" als reell Differenzierbare und sie haben viele erstaunliche Eigenschaften. Harmonische Funktionen gehen gewissermaßen aus komplex differenzierbaren Funktionen hervor und erben daher einige dieser verblüffenden Eigenschaften. Die Poissonformel und das Maximumsprinzip sind nur zwei Beispiele für solche Eigenschaften.

8.3.2 Das Maximumsprinzip

Eine harmonische Funktion nimmt ihr Maximum und Minimum nie im Inneren eines zusammenhängenden Gebiets U an (es sei denn sie ist konstant). Ist die Funktion auf dem Rand des Gebiets ∂U vernünftig definiert, nimmt sie ihre Extremalwerte auf eben diesem Rand an.
Diese Eigenschaft erleichtert das Maximieren oder Minimieren von harmonischen Funktionen extrem. Man kann sich nämlich auf den Rand des Gebiets beschränken.

8.3.3 Die Poissonformel

Es bezeichne $B(\vec{x}, r) \in \mathbb{R}^2$ den Kreis mit Radius r um den Mittelpunkt $\vec{x}$ und $\partial B(\vec{x}, r)$ bezeichne dessen Rand. Für eine beliebige harmonische Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt folgende Gleichheit:

$$f(\vec{v}) = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{\partial B(\vec{v}, r)} f(x, y)\, \mathrm{d}S, \tag{75}$$

wobei $\int_{\partial B(\vec{v}, r)} \mathrm{d}S$ das Wegintegral längs $\partial B(\vec{v}, r)$ bezeichnet. Der Radius r kann beliebig gewählt werden.

8.3.4 Beispiel

Wir betrachten folgende Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \triangle u(x, y) &= 0 \qquad \forall (x, y) \in B(1, 0) \\ u(x, y) &= 1 + 2x^4 \qquad \forall (x, y) \in \partial B(1, 0) . \end{aligned}$$

Nun könnten wir diese Differentialgleichung mit einem Separationsansatz lösen. Allerdings können wir mithilfe des Maximumsprinzips und der Poissonformel Informationen über die Lösung gewinnen, ohne sie erst ermitteln zu müssen. Wir beobachten zum Beispiel, dass:

$$u(x, y) = 1 + 2x^4 \geq 1 > 0 \qquad \forall (x, y) \in \partial B(1, 0) .$$

Mit dem Maximumsprinzip können wir daraus sofort folgern, dass unsere Lösung überall positiv sein muss:

$$u(x, y) > 0 \qquad \forall (x, y) \in B(1, 0) .$$

Darüber hinaus können wir mithilfe der Poissonformel (75) den Wert der Lösung in $(0,0)$ bestimmen. Wenn wir nämlich $r=1$ setzen, gilt:

$$\begin{aligned}
u(0,0) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial B(1,0)} f(x,y)\,\mathrm{d}S = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial B(1,0)} \left\{1+2x^4\right\}\mathrm{d}S \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial B(1,0)} \left\{1+2r^4\cos^4(\theta)\right\}\mathrm{d}S \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left\{1+2r^4\cos^4(\theta)\right\}\mathrm{d}\theta|_{r=1} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left\{1+2\cos^4(\theta)\right\}\mathrm{d}\theta = 1+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} 2\cos^4(\theta)\,\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

Das verbleibende Integral lässt sich leichter berechnen, wenn wir $2\cos^4(\theta)$ vereinfachen:

$$\begin{aligned}
2\cos^4(\theta) &= \left\{\cos^2(\theta)\right\}^2 = \left\{\frac{1}{2}\left[1+\cos(2\theta)\right]\right\}^2 \\
&= 2\left\{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{1}{4}\cos^2(2\theta)\right\} \\
&= \frac{1}{2}+\cos(2\theta)+\frac{1}{4}\left[1+\cos(4\theta)\right] \\
&= \frac{3}{4}+\cos(2\theta)+\frac{1}{4}\cos(4\theta).
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
u(0,0) &= 1+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} 2\cos^4(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= 1+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left\{\frac{3}{4}+\cos(2\theta)+\frac{1}{4}\cos(4\theta)\right\}\mathrm{d}\theta \\
&= 1+\frac{1}{2\pi}\frac{3}{4}2\pi+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos(2\theta)\,\mathrm{d}\theta+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{4}\cos(4\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= 1+\frac{3}{4}+0+0=\frac{7}{4}.
\end{aligned}$$

9 Die Laplacetransformation

Die Laplacetransformation (LT) stellt einen weiteren Kniff zum Lösen von Differentialgleichungen dar. Dieser Kniff eignet sich besonders für das Lösen gewöhnlicher DGL's.

9.1 Definition und Eigenschaften

9.1.1 Definition (*Laplacetransformation*)

Für eine beliebige integrable Funktion $f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ ist die Laplacetransformation $\mathcal{L}(f)(s)$ folgendermaßen definiert:

$$\mathcal{L}\{f(x)\}(s) := F(s) := \int\limits_0^\infty f(x)\,\mathrm{e}^{-xs}\mathrm{d}x. \tag{76}$$

Bemerkung: Die Laplacetransformation entspricht salopp gesprochen einer reellen Fouriertransformation. Sie ist jedoch für weitaus mehr Funktionen definiert als die FT, dafür ist die Rücktransformation jedoch erheblich komplizierter. Nichtsdestotrotz verfügt sie über ähnliche Eigenschaften wie die FT und ist daher sehr nützlich zum Berechnen von DGL's.

9.1.2 Satz (*Eigenschaften der Laplacetransformation*)

Die Laplacetransformation hat folgende Eigenschaften:

1. Die LT ist linear, d.h für beliebige (integrable) Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gilt:

$$\mathcal{L}\{af(x) + bg(x)\}(s) = a\mathcal{L}\{f(x)\}(s) + b\mathcal{L}\{g(x)\}(s) \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

2. Die LT bildet Ableitungs- auf Multiplikationsoperatoren ab:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right\}(s) &= s\mathcal{L}\{f(x)\}(s) - f(0) \\
\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x)\right\}(s) &= s^2\mathcal{L}\{f(x)\}(s) - sf(0) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(0) \\
\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}f(x)\right\}(s) &= s^3\mathcal{L}\{f(x)\}(s) - s^2f(0) - s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(0) - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(0) \\
\text{usw.}
\end{aligned}$$

3. Die LT bildet Multiplikations- auf Ableitungsoperatoren ab:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{xf(x)\}(s) &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}\{f(x)\}(s) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s) \\
\mathcal{L}\{x^nf(x)\}(s) &= (-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\mathcal{L}\{f(x)\}(s) = (-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}F(s).
\end{aligned}$$

4. Für eine beliebige Funktion $f(x)$ gilt die Translationsformel:

$$\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{ax}f(x)\}(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}(s-a).$$

5. Es gilt das Faltungstheorem:

$$\mathcal{L}\left\{(f \circledast g)(x)\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{f(x)\right\}(s)\, \mathcal{L}\left\{g(x)\right\}(s) = F(s)\, G(s)$$

Beweis: Der Beweis dieser LT-Eigenschaften verläuft analog zu dem Beweis der entsprechenden FT-Eigenschaften und soll hier nicht wiederholt werden.

9.1.3 Definition (*inverse Laplacetransformation*)

Es existiert eine inverse Laplacetransformation $\mathcal{L}^{-1}$, sodass für jede integrable Funktion $f(x)$ gilt:

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left\{f(x)\right\}(s)\right\}(x)\,. \tag{77}$$

Außerdem ist die inverse LT linear:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{aF(s) + bG(s)\right\}(x) = af(x) + bg(x) \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{78}$$

Bemerkung: Im Gegensatz zur inversen FT ist es schwierig, aber dennoch möglich, die inverse Laplacetransformation zu berechnen. Wir werden aber auf das explizite Berechnen von $\mathcal{L}^{-1}$ verzichten. Stattdessen versuchen wir die inverse Laplacetransformation lediglich mithilfe der Eigenschaften (77) und (78), sowie Tabelle 1, zu ermitteln

9.2 Berechnen von Laplacetransformationen

In diesem Abschnitt wollen wir das Berechnen der LT anhand einiger Beispiele veranschaulichen.

9.2.1 Beispiel: LT von 1, x und x^2

Gemäß Definition (76) ist die LT von 1 durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\mathcal{L}\left\{1\right\}(s) = \int_0^\infty 1\mathrm{e}^{-ts}\mathrm{d}t = -\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-ts}|_0^\infty = \frac{1}{s}.$$

Die LT von x können wir durch einmalige partielle Integration ermitteln:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{x\right\}(s) &= \int_0^\infty x\mathrm{e}^{-xs}\mathrm{d}x \overset{\text{p.I}}{=} -\frac{x}{s}\mathrm{e}^{-xs}|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty 1\mathrm{e}^{-ts}\mathrm{d}x \\ &= 0 + \frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{1\right\}(s) = \frac{1}{s^2}.\end{aligned}$$

Die LT von x^2 lässt sich auf ähnliche Weise berechnen:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{x^2\right\}(s) &= \int_0^\infty x\mathrm{e}^{-xs}\mathrm{d}x \overset{\text{p.I}}{=} -\frac{x^2}{s}\mathrm{e}^{-xs}|_0^\infty + \frac{2}{s}\int_0^\infty x\mathrm{e}\mathrm{d}x \\ &= 0 + \frac{2}{s}\mathcal{L}\left\{x\right\}(s) = \frac{2}{s^3}.\end{aligned}$$

Induktiv können wir somit relativ problemlos zeigen, dass darüber hinaus gilt:

$$\mathcal{L}\left\{x^n\right\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

9.2.2 Beispiel: LT von e^{ax}

Gemäß Definition (76) gilt:

$$\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{ax}\right\}(s) = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{ax}\mathrm{e}^{-xs}\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-(s-a)x}\mathrm{d}x.$$

Dieses Integral ist offensichtlich nur für $s > a$ definiert. Somit ist auch die LT lediglich für $s > a$ definiert. In diesem Fall gilt:

$$\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{ax}\right\}(s) = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-(s-a)x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{s-a}\mathrm{e}^{-(s-a)x}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s-a}.$$

Somit erhalten wir:

$$\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{ax}\right\}(s) = \frac{1}{s-a} \qquad \forall s > a.$$

9.2.3 Beispiel: LT von $\cos(ax)$:

Wir verwenden $\cos(ax) = \frac{1}{2}\left\{\mathrm{e}^{iax} + \mathrm{e}^{-iax}\right\}$ und Definition (76):

$$\mathcal{L}\left\{\cos(ax)\right\}(s) = \int\limits_0^\infty \cos(ax)\,\mathrm{e}^{-xs}\mathrm{d}x.$$

Wir bemerken, dass dieses Integral lediglich für $s > 0$ definiert ist. In diesem Fall gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\cos(ax)\right\}(s) &= \int_0^\infty \cos(ax)\,\mathrm{e}^{-xs}\mathrm{d}x. \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{2}\left\{\mathrm{e}^{iax}+\mathrm{e}^{-iax}\right\}\mathrm{e}^{-xs}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{iax}\mathrm{e}^{-xs}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-iax}\mathrm{e}^{-xs}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s-ia)x}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+ia)x}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{s-ia}\mathrm{e}^{-(s-ia)x}|_0^\infty - \frac{1}{2}\frac{1}{s+ia}\mathrm{e}^{-(s+ia)x}|_0^\infty \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{s-ia} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+ia} = \frac{1}{2}\frac{(s+ia)+(s-ia)}{(s+ia)(s-ia)} \\
&= \frac{s}{s^2+a^2}.
\end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\mathcal{L}\left\{\cos(ax)\right\}(s) = \frac{s}{s^2+a^2} \qquad \forall s > 0.$$

9.2.4 LT von stückweise differenzierbaren Funktionen

Wir erläutern das Berechnen der LT von stückweise differenzierbaren Funktionen an folgender Beispielfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

Für diese Funktion gilt offenbar:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{f(x)\right\}(s) &= \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{e}^{-xs}\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{e}^{-xs}\mathrm{d}x + \int_1^\infty \mathrm{e}^{-xs}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{s}x\mathrm{e}^{-xs}|_0^1 + \frac{1}{s}\int_0^1 \mathrm{e}^{-xs}\mathrm{d}x - \frac{1}{s}\mathrm{e}^{-xs}|_1^\infty \\
&= -\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-s} - \frac{1}{s^2}\mathrm{e}^{-xs}|_0^1 + \frac{1}{s}\mathrm{e}^{-s} \\
&= \frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s^2}.
\end{aligned}$$

Originalfunktion $f(x)$	Laplacetransformation $F(s)$	Bedingung an s
1	$\frac{1}{s}$	$s>0$
x	$\frac{1}{s^2}$	$s>0$
x^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s>0$
$\sin(ax)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$s>0$
$\cos(ax)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s>a$
$\mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$s>a$
$\mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	$s>a$
$x^n\mathrm{e}^{ax}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s>a$

Table 1: Zusammenfassung der wichtigesten Laplacetransformationen. Die erste Spalte enthält jeweils die Originalfunktionen und die zweite Spalte die Laplacetransformationen. Die dritte Spalte gibt die aus der LT resultierende Bedingung an s an.

9.3 Berechnen der inversen LT

Für das Berechnen der inversen LT haben wir keine einfache Formel zur Verfügung (eine solche Formel existiert zwar, aber sie ist relativ kompliziert). Deshalb improvisieren wir und versuchen mithilfe der Eigenschaften (77) und (78) die inverse LT ohne explizite Formel zu rekonstruieren. Dafür ist es essentiell einige Standard-Laplacetransformationen zu kennen. Die wichtigsten sind in Tabelle 1 aufgelistet. Dieses Improvisieren wollen wir anhand einiger Beispiele illustrieren.

9.3.1 Beispiel: inverse LT von $F(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{16}{s^2+4}$

Aus Tabelle 1 lesen wir folgende LT's ab:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{ax}\right\}(s) &= \frac{1}{s-a} \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{2x}\right\}(s) = \frac{1}{s-2} \\
\mathcal{L}\left\{\sin(ax)\right\}(s) &= \frac{a}{s^2+a^2} \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\sin(2x)\right\}(s) = \frac{2}{s^2+4}.
\end{aligned}$$

Somit können wir unsere Funktion $F(s)$ folgendermaßen umschreiben:

$$F(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{16}{s^2+4} = \mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{2x}\right\}(s) - 8\mathcal{L}\left\{\sin(2x)\right\}(s).$$

Da wir an $\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}(x)$ interessiert sind, kommen nun Eigenschaften (77) (Linearität) und (78) ins Spiel. Denn mit ihnen gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}(x) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{2x}\right\}(s) - 8\mathcal{L}\left\{\sin(2x)\right\}(s)\right\}(x) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{2x}\right\}(s)\right\}(x) - 8\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left\{\sin(2x)\right\}(s)\right\}(x) \\
&= \mathrm{e}^{2x} - 8\sin(2x).
\end{aligned}$$

Und das ist bereits die Ursprungsfunktion. Somit ist es uns gelungen $\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}(x)$ ohne expliziter Formel zu berechnen.

9.3.2 Beispiel: Inverse LT von $F(s) = \frac{s+9}{s^2-2s-3}$

Diese Funktion gleicht keinem Ausdruck aus unserer Tabelle und wir müssen ihn daher zunächst etwas umformen. Zum Beispiel können wir diesen Bruch in zwei Brüche zerlegen (Partialbruchzerlegung). Zu diesem Zweck nehmen wir den Nenner etwas genauer unter die Lupe. Offenbar hat die Gleichung $s^2-2s-3=0$ folgende Lösungen:

$$\lambda_{\pm} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2.$$

Deshalb gilt:

$$s^2 - 2s - 3 = (s+1)(s-3),$$

und wir können eine Partialbruchzerlegung ansetzen:

$$\begin{aligned}\frac{s+9}{s^2-2s-3} &\stackrel{!}{=} \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-3} = \frac{(s-3)A + (s+1)B}{(s+1)(s-3)} \\ &= \frac{As - 3A + Bs + B}{s^2-2s-3} = \frac{(A+B)s + B - 3A}{s^2-2s-3}.\end{aligned}$$

Gemäß eines Koeffizientenvergleiches muss daher folgendes gelten:

$$\begin{aligned}A + B &\stackrel{!}{=} 1 \\ B - 3A &\stackrel{!}{=} 9.\end{aligned}$$

Diese Gleichung kann unter anderem durch Einsetzen gelöst werden ($A = 1-B$):

$$\begin{aligned}B - 3A &= B - 3(1-B) = 4B - 3 = 9 \\ \Rightarrow 4B &= 12 \\ \Rightarrow B &= 3 \\ \Rightarrow A &= 1 - B = -2.\end{aligned}$$

Somit war unsere Partialbruchzerlegung erfolgreich und wir können folgendes schreiben:

$$\frac{s+9}{s^2-2s-3} = \frac{-2}{s+1} + \frac{3}{s-3}.$$

Und jetzt können wir unsere Tabelle verwenden. Dank ihr wissen wir nämlich, dass gilt :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{e^{ax}\right\}(s) &= \frac{1}{s-a} \Rightarrow \mathcal{L}\left\{e^{-x}\right\}(s) = \frac{1}{s+1} \\ \mathcal{L}\left\{e^{ax}\right\}(s) &= \frac{1}{s-a} \Rightarrow \mathcal{L}\left\{e^{3x}\right\}(s) = \frac{1}{s-3}.\end{aligned}$$

Und erhalten wir mit (78) und 77) :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+9}{s^2-2s-3}\right\}(x) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2}{s+1}+\frac{3}{s-3}\right\}(x) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{-2\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{-x}\right\}(s)+3\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{3x}\right\}(s)\right\}(x) \\
&= -2\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{-x}\right\}(s)\right\}(x)+3\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{3x}\right\}(s)\right\}(x) \\
&= -2\mathrm{e}^{-x}+3\mathrm{e}^{3x}=3\mathrm{e}^{3x}-2\mathrm{e}^{-x}.
\end{aligned}
$$

Auch hier ist es uns gelungen, die inverse LT auch hier ohne explizites Anwenden einer Formel ermitteln.

9.4 Lösen von gewöhnlichen DGL's mithilfe der LT

Die LT ist ein besonders nützliches Werkzeug zum Lösen von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Der Masterplan hierfür lautet folgendermaßen:

- Laplacetransformieren der DGL: Wegen der Eigenschaften der LT verwandelt sich die DGL dadurch in eine algebraische Gleichung.
- Lösen der laplacetransformierten algebraischen Gleichung.
- Zurücktransformieren der algebraischen Lösung mittels der inversen LT.

Dieses Vorgehen wollen wir nun an zwei Vorlesungsbeispielen vorführen.

9.4.1 Beispiel 1

In diesem Beispiel betrachten wir folgendes Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x)+2u(x) &= x \qquad (79)\\
u(0) &= 1. \qquad (80)
\end{aligned}
$$

Wir führen folgende Notation für die laplacetransformierte Lösungsfunktion ein:

$$U(s):=\mathcal{L}\{u(x)\}(s),$$

und wenden die LT auf (79) an. Für die linke Seite erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x)+2u(x)\right\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x)\right\}(s)+2\mathcal{L}\{u(x)\}(s) \\
&= s\mathcal{L}\{u(x)\}(s)-u(0)+2\mathcal{L}\{u(x)\}(s) \\
&= sU(s)-1+2U(s)=(s+2)U(s)-1.
\end{aligned}
$$

Die rechte Seite kennen wir aus unserer Tabelle:

$$\mathcal{L}\{x\}(s)=\frac{1}{s^2},$$

und somit erhalten wir folgende algebraische Gleichung für $U(s)$:

$$(s+2)\,U(s) - 1 = \frac{1}{s^2}.$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet:

$$U(s) = \frac{1+s^2}{s^2(s+2)} = \frac{1}{s^2(s+2)} + \frac{1}{s+2},$$

und wir haben die laplacetransformierte Lösung bereits gefunden. Allerdings müssen wir sie noch zurücktransformieren. Dies gelingt uns wieder mithilfe einer Partialbruchzerlegung des ersten Terms:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2(s+2)} &\overset{!}{=} \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} = \frac{As(s+2) + B(s+2) + Cs^2}{s^2(s+2)} \\ &= \frac{As^2 + 2As + Bs + 2B + Cs^2}{s^2(s+2)} = \frac{(A+C)\,s^2 + (B+2A)\,s + 2B}{s^2(s+2)}. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert nun:

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \Rightarrow C = -A \\ B + 2A &= 0 \Rightarrow A = -\frac{B}{2} \\ 2B &= 1. \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} \\ A &= -\frac{B}{2} = -\frac{1}{4} \\ C &= -A = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

und unsere Partialbruchzerlegung war erfolgreich:

$$\frac{1}{s^2(s+2)} = -\frac{1}{4s} + \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{4(s+2)}.$$

Mithilfe dieser Partialbruchzerlegung und der Linearität der inversen LT (78) erhalten wir nun:

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)} + \frac{1}{s+2}\right\}(x) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{4s} + \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{4(s+2)} + \frac{1}{s+2}\right\}(x) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{4s} + \frac{1}{2s^2} + \frac{5}{4}\frac{1}{s+2}\right\}(x) \\ &= -\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(x) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}(x) + \frac{5}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}(x). \end{aligned}$$

Jetzt kommt wieder unsere Tabelle zum Einsatz. Denn an ihr können wir folgende Identitäten ablesen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{1\right\}(s) &= \frac{1}{s}\\
\mathcal{L}\left\{x\right\}(s) &= \frac{1}{s^2}\\
\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{ax}\right\}(s) &= \frac{1}{s-a} \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{-2x}\right\}(s) = \frac{1}{s+2}.
\end{aligned}$$

Damit und mit der definierenden Eigenschaft der inversen LT (77) können wir die Lösung unserer DGL ermitteln:

$$\begin{aligned}
u(x) &= -\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(x) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}(x) + \frac{5}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}(x)\\
&= -\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left\{1\right\}(s)\right\}(x) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left\{x\right\}(s)\right\}(x) + \frac{5}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{-2x}\right\}(s)\right\}(x)\\
&= -\frac{1}{4} + \frac{x}{2} + \frac{5}{4}\mathrm{e}^{-2x}.
\end{aligned}$$

Die Lösung der DGL lautet somit:

$$u(x) = \frac{5}{4}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}.$$

9.4.2 Beispiel 2

In diesem Beispiel behandeln wir folgende gewöhnliche DGL:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u(x) - u(x) &= \mathrm{e}^x\\
u(0) &= 1\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(0) &= 1.
\end{aligned}$$

Laplacetransformieren dieser Gleichung liefert mit der Notation $U(s) := \mathcal{L}\left\{u(x)\right\}(s)$ folgenden Ausdruck für die linke Seite:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u(x) - u(x)\right\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u(x)\right\}(s) - \mathcal{L}\left\{u(x)\right\}(s)\\
&= s^2\mathcal{L}\left\{u(x)\right\}(s) - su(0) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(0) - \mathcal{L}\left\{u(x)\right\}(s)\\
&= s^2U(s) - s + 1 - U(s) = \left(s^2-1\right)U(s) - s - 1.
\end{aligned}$$

Eine LT der rechten Seite ergibt gemäß unserer Tabelle:

$$\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^x\right\}(s) = \frac{1}{s-1}.$$

Somit erhalten wir folgende algebraische Gleichung für $U(s)$:

$$\begin{aligned}\left(s^2-1\right)U(s)-s-1 &= \frac{1}{s-1}\\ \Rightarrow U(s) &= \frac{1}{(s^2-1)(s-1)}+\frac{1+s}{s^2-1}\\ &= \frac{1}{s-1}+\frac{1}{(s+1)(s-1)^2}.\end{aligned}$$

Um die Rücktransformation zu finden, müssen wir eine Partialbruchzerlegung für den zweiten Term ansetzen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(s+1)(s-1)^2} &\overset{!}{=} \frac{A}{s+1}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{(s-1)^2}\\ &= \frac{A(s-1)^2+B(s-1)(s+1)+C(s+1)}{(s+1)(s-1)^2}\\ &= \frac{A\left(s^2-2s+1\right)+B\left(s^2-1\right)+C(s+1)}{(s+1)(s-1)^2}\\ &= \frac{(A+B)s^2+(C-2A)s+(A-B+C)}{(s+1)(s-1)^2}.\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{aligned}A+B &= 0\Rightarrow B=-A\\ C-2A &= 0\Rightarrow C=2A\\ A-B+C &= 1.\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem kann durch Einsetzen gelöst werden:

$$\begin{aligned}-1 &= A-B+C=A-(-A)+(2A)\\ &= A+A+2A=4A\\ \Rightarrow A &= \frac{1}{4}\\ \Rightarrow B &= -A=-\frac{1}{4}\\ \Rightarrow C &= 2A=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Somit war unsere Partialbruchzerlegung erfolgreich:

$$\frac{1}{(s+1)(s-1)^2}=\frac{1}{4}\frac{1}{s+1}-\frac{1}{4}\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)^2}.$$

Wir sind aber leider noch nicht ganz fertig, da der letzte Term nicht als LT in unserer Tabelle auftaucht. Deshalb müssen wir $\frac{1}{(s-1)^2}$ noch etwas umformen.

Offenbar gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(s-1)^2} &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{s-1} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^x\right\}(s) \\
&= \mathcal{L}\left\{x\mathrm{e}^x\right\}(s),
\end{aligned}$$

wobei wir hierfür unsere Tabelle und die Eigenschaften der LT ($\mathcal{L}\left\{xf(x)\right\}(s) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}\left\{f(x)\right\}(s)$) verwendet haben. Nun können wir endlich nach unserem gewohnten Schema zurücktransformieren:

$$\begin{aligned}
u(x) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{U(s)\right\}(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s+1)(s-1)^2}\right\}(x) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)^2}\right\}(x) \\
&= \tfrac{3}{4}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}(x) + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}(x) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}(x) \\
&= \tfrac{3}{4}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^x\right\}(s)\right\}(x) + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{-x}\right\}(s)\right\}(x) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left\{x\mathrm{e}^x\right\}(s)\right\}(x) \\
&= \frac{3}{4}\mathrm{e}^x + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}x\mathrm{e}^x.
\end{aligned}$$