

# Eine kurze Einführung in die Elektrodynamik

Richard Küng\*

July 19, 2013

## Abstract

Ziel dieser Rekapitulation ist es, einen mathematisch angehauchten Rückblick auf den Vorlesungsstoff der Experimentalphysik II zu werfen. Besonderes Augenmerk wird dabei auf die Maxwellgleichungen gelegt, welche die (theoretische) Grundlage von Elektrostatik und Elektrodynamik bilden.

## Contents

<b>1</b>	<b>Elektrostatik</b>	<b>2</b>
1.1	Paradebeispiele für elektrische Ladungsverteilungen . . . . .	3
1.1.1	Das elektrische Feld einer Punktladung . . . . .	3
1.1.2	Das elektrische Feld eines unendlich langen geraden Drahtes	5
1.1.3	Das elektrische Feld einer homogen geladenen unendlich großen Fläche . . . . .	6
1.2	Das elektrische Potential . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Magnetostatik</b>	<b>8</b>
2.1	Paradebeispiele für magnetische Stromverteilungen . . . . .	10
2.1.1	Magnetfeld eines unendlich langen Drahtes . . . . .	10
2.1.2	Magnetfeld einer kreisrunden Leiterschleife . . . . .	12
2.2	Das magnetische Vektorpotential . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Elektrodynamik: Felder bewegter Ladungen und variabler Ströme</b>	<b>14</b>
3.1	Das Faradaysche Induktionsgesetz . . . . .	14
3.1.1	Beispiel: Generator/Elektromotor . . . . .	15
3.1.2	Beispiel: Selbstinduktion in einem Koaxialkabel . . . . .	17
3.2	Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom . . . . .	18
3.3	Die Maxwell-Gleichungen . . . . .	19
3.3.1	Die Kontinuitätsgleichung . . . . .	19

---

\*e-mail: richard.kueng@physik.uni-freiburg.de

# 1 Elektrostatik

In der Elektrostatik befasst man sich mit statischen (d.h. ruhenden, oder unbewegten) Ladungsträgern. Die fundamentale Kernfrage hierbei ist:

**Ziel:** Gegeben eine beliebige statische Ladungsverteilung  $\rho$ , berechne das resultierende elektrische Feld  $\vec{E}$ .

Mathematisch ist eine gewisse Ladungsverteilung vollständig durch die Ladungsdichte  $\rho(x, y, z)$  mit  $[\rho] = C/m^3$  charakterisiert. Diese kann diskret<sup>1</sup>, oder kontinuierlich<sup>2</sup> sein. Das gesuchte elektrische Feld  $\vec{E}(x, y, z)$  lässt sich ebenfalls mathematisch präzise beschreiben. Dabei handelt es sich um ein Vektorfeld<sup>3</sup> im  $\mathbb{R}^3$ , welches in jedem Punkt die auf eine Einheitsladung wirkende Kraft wiedergibt. Konkret gilt also:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{Q_{\text{test}}} \vec{F}(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (1)$$

wobei  $\vec{F}(x, y, z)$  die Kraft bezeichnet, welche unsere Ladungskonfiguration auf ein Testteilchen mit Ladung  $Q_{\text{test}}$  im Punkt  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  ausübt. Dieses elektrische Feld  $\vec{E}$  charakterisiert den Einfluss einer dazugehörigen Ladungsverteilung auf beliebig geladene Teilchen vollständig und ist somit zurecht die wichtigste Größe der Elektrostatik.

**Nota Bene:** Das elektrische Feld einer Ladungsverteilung ist über die auf ein weiteres "Testteilchen" wirkende Kraft definiert. Die Tatsache, dass ein solches Testteilchen seinerseits eine elektrische Kraft auf die Ladungsverteilung von Interesse ausübt (actio = reactio) wird dabei jedoch völlig vernachlässigt. Oft argumentiert man dieses Problem weg, indem man sich auf sehr kleine Testladungen beruft ( $Q_{\text{test}} \ll 1C$ ), deren Einfluss auf die statische Ladungsverteilung folglich sehr gering ist und somit vernachlässigt werden kann. Ganz sauber und realistisch ist dieses Argument aber offensichtlich nicht.

Es ist seit langem bekannt, dass das resultierende elektrische Feld einer beliebigen Ladungsverteilung durch folgende beiden Vektorgleichungen ermittelt werden kann:

$$\text{rot} \vec{E} = 0, \quad (2)$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (3)$$

---

<sup>1</sup>Ein typisches Beispiel für eine diskrete Ladungsverteilung ist eine Konfiguration aus mehreren räumlich getrennten Punktladungen.

<sup>2</sup>Typische Beispiele hierfür sind eine Kurve (ein Draht) mit homogener Längenladungsdichte  $\lambda$  ( $[\lambda] = C/m$ ), oder eine Fläche (Kondensatorplatte) mit homogener Flächenladungsdichte  $\sigma$  ( $[\sigma] = C/m^2$ ).

<sup>3</sup>Zur Erinnerung: Ein Vektorfeld  $\vec{E}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist eine Funktion, welche jedem Punkt  $p \in \mathbb{R}^3$  einen Vektor  $\vec{E}(p) = (E_x(p), E_y(p), E_z(p)) \in \mathbb{R}^3$  zuordnet

- Die erste Gleichung ist homogen und besagt, dass jedes elektrische Feld wirbelfrei sein muss. Sie ist die mathematische Formulierung folgender empirisch bekannten Tatsache: Elektrische Feldlinien sind nie geschlossen. Sie beginnen stets bei positiven Ladungsträgern und enden stets bei Negativen, oder im Unendlichen. Mathematisch gesehen ist (2) eine wichtige Randbedingung, welche die Anzahl der möglichen elektrischen Felder  $\vec{E}$  stark einschränkt.
- Die zweite Gleichung ist inhomogen und verknüpft das gesuchte Feld  $\vec{E}$  mit der zugrundeliegenden Ladungsverteilung  $\rho$ . Die Permittivität des Vakuums  $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{As/Vm}$  ist eine empirisch bestimmte Naturkonstante. Diese Gleichung ist kurz und prägnant und extrem flexibel. Tatsächlich kann man sie über einen beliebigen kompakten Körper  $V \subset \mathbb{R}^3$  integrieren und erhält mit dem Satz von Gauss:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho(x, y, z) \, dx dy dz &= \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} \, dx dy dz \\
&= \iint_{\partial V} \vec{E}(x, y, z) \, d\vec{A} \\
&= \Phi_{\vec{E}}(V),
\end{aligned}$$

wobei die letzte Zeile den Fluss<sup>4</sup> des Vektorfelds  $\vec{E}$  durch den Rand  $\partial V$  des Körpers  $V$  bezeichnet. Diese Version von Gleichung (3) ist viel praktischer, da der Körper  $V$  beliebig gewählt werden kann. Insbesondere kann man ihn daher an die Geometrie und Symmetrie der zugrundeliegenden Ladungsverteilung anpassen. Darüber hinaus ist diese “integrale” Form der Gleichung mathematisch robuster und viel einfacher anzuwenden, als die zugrundeliegende Gleichung (3).

## 1.1 Paradebeispiele für elektrische Ladungsverteilungen

Wir wollen nun den Umgang mit Gleichungen (2) und (3) anhand dreier wichtiger Beispiele veranschaulichen

### 1.1.1 Das elektrische Feld einer Punktladung

Hier behandeln wir den einfachsten Fall einer elektrischen Ladungsverteilung: eine Punktladung mit Ladung  $q$  im Vakuum. Wir wollen zudem davon ausgehen, dass diese Ladung positiv ist (ansonsten dreht sich einfach die Richtung des resultierenden Feldes um). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass sich diese Punktladung im Ursprung unseres Koordinatensystems befindet. Aus der vollen Rotationssymmetrie dieser Ladungsverteilung

<sup>4</sup>Zur Erinnerung: Der Fluss eines Vektorfeldes  $\vec{E}$  durch eine Fläche  $A$  ist definiert als  $\Phi_{\vec{E}}(A) = \iint_A \vec{E}(x, y, z) \, d\vec{A} = \iint_A \vec{E}(x, y, z) \cdot \vec{n}(x, y, z) \, dA$ , wobei  $\vec{n}(x, y, z)$  den Flächennormalenvektor von  $A$  im Punkt  $(x, y, z)$  beschreibt.

können wir folgern, dass die Stärke des Elektrischen Feldes  $|\vec{E}(x, y, z)|$  nur vom jeweiligen Abstand  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  abhängen kann. Die homogene Gleichung (2) verlangt zusätzlich, dass das Feld  $\vec{E}$  wirbelfrei sein muss. Dies ist aber nur möglich, wenn das elektrische Feld radial von der Punktladung wegzeigt<sup>5</sup>. Konkret gilt also

$$\vec{E}(\vec{r}) \parallel \vec{r}, \quad (4)$$

wobei  $\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  einen beliebigen Punkt im Raum beschreibt. Diese Tatsache macht die Kugelsymmetrie manifest. Zur Erinnerung: Geometrisch lässt sich die Kugel folgendermaßen definieren: Sie ist das einzige Objekt  $V \subset \mathbb{R}^3$ , bei dem für jeden Positionsvektor  $\vec{r} \in \partial V$  der Flächennormalenvektor  $\vec{n}(\vec{r})$  parallel zu  $\vec{r}$  ist. Wählen wir also als Integrationsvolumen  $V$  eine Kugel mit Radius  $r$  um den Ursprung, so können wir aus der Kugeldefinition und (4) schließen, dass  $\vec{E}(\vec{r}) \parallel \vec{n}(\vec{r})$  gilt und somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{q}{\epsilon_0} &= \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho(x, y, z) \, dx dy dz \\ &= \iint_{\partial V} \vec{E}(x, y, z) \, d\vec{A} = \iint_{\partial V} \vec{E}(x, y, z) \vec{n}(x, y, z) \, dA \\ &= \iint_{\partial V} |\vec{E}(x, y, z)| \, d\vec{A} = E(r) \iint_{\partial V} dA \\ &= E(r) 4\pi r^2. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für die Stärke des elektrischen Feldes

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

und wegen  $\vec{E}(\vec{r}) \parallel \vec{r}$  kennen wir auch die Feldrichtung. Kombiniert ergeben diese beiden Einsichten:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Für eine explizite Testladung mit Ladung  $Q_{\text{test}}$  und Position  $\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  erhalten wir dann folgende resultierende Kraft:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ_{\text{test}}}{r^3} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ_{\text{test}}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} (\vec{r} - \vec{r}_0),$$

---

<sup>5</sup>Dies kann z.B. durch einen Widerspruchsbeweis gezeigt werden: Angenommen das Feld ist nicht radial. Dann lässt es sich in eine wirbelfreie und eine divergenzfreie Komponente zerlegen. Letztere ist jedoch per Definition nicht wirbelfrei, was zu einem Widerspruch mit Gleichung (2) führt.

wobei wir den Ortsvektor der ursprünglichen Punktladung  $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$  eingeführt haben. Diese Kraft ist jedoch nichts anderes als die wohlbekannte Coulombkraft zwischen zwei geladenen Teilchen. Allerdings haben wir dieses Kraftgesetz noch mit keinem Wort erwähnt. Vielmehr folgt es aus Gleichungen (2) und (3), welche jedoch viel allgemeiner sind.

### 1.1.2 Das elektrische Feld eines unendlich langen geraden Drahtes

In diesem Beispiel wollen wir das elektrische Feld eines unendlich langen homogen geladenen Drahtes bestimmen. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass dieser entlang der  $z$ -Achse unseres Koordinatensystems verläuft. Dieser Draht ist dann vollständig durch seine Linienladungsdichte  $\lambda$  (Ladung pro Meter Länge,  $[\lambda] = C/m$ ) definiert, welche positiv oder negativ sein kann. Wir wollen hier annehmen, dass es sich erneut um eine positive Dichte handelt (für negative Dichten dreht dann einfach wieder das Vorzeichen in unserem Endresultat). Es ist einfach zu sehen, dass die Geometrie unsere Ladungsverteilung voll zylindersymmetrisch ist. Daraus können wir folgern, dass die Stärke des resultierenden elektrischen Feldes  $\vec{E}(x, y, z)$  nur vom Normalabstand  $r_\perp = \sqrt{x^2 + y^2}$  des Punktes zur  $z$ -Achse abhängen kann. Umhüllt man den Draht mit einem Zylinder beliebigen Ausmaßes, so muss das  $\vec{E}$ -Feld in jedem Mantelpunkt gleich stark sein.

Ähnlich wie im vorigen Beispiel, verlangt Gleichung (2) zudem, dass das Feld in jedem Mantelpunkt  $\vec{r}$  parallel zum Flächennormalenvektor  $\vec{n}(\vec{r})$  der Mantelfläche sein muss. Für die Ober- und Unterflächen des Zylinders müssen jedoch Feldvektoren und Flächennormalvektoren normal zueinander stehen ( $\vec{E} \perp \vec{n}$ ). Deshalb verschwindet der Beitrag dieser Flächen zum Gesamtfluss und wir können sie getrost vernachlässigen. Wählen wir also konkret für unser Volumen  $V$  einen Zylinder mit Radius  $r$  und Länge  $l$  erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \frac{l\lambda}{\epsilon_0} &= \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho(x, y, z) \, dx dy dz \\
 &= \iiint_{\partial V} \vec{E}(x, y, z) \, d\vec{A} = \iint_{\partial V} \vec{E}(x, y, z) \vec{n}(x, y, z) \, dA \\
 &= \iint_{\text{Mantel}} \vec{E}(x, y, z) \vec{n}(x, y, z) \, dA + \iint_{\text{Boden}} \vec{E}(x, y, z) \vec{n}(x, y, z) \, dA + \iint_{\text{Deckel}} \vec{E}(x, y, z) \vec{n}(x, y, z) \, dA \\
 &= \iint_{\text{Mantel}} \left| \vec{E}(x, y, z) \right| \, dA + 0 + 0 \\
 &= E(r) \iint_{\text{Mantel}} \, dA \\
 &= E(r) 2\pi r,
 \end{aligned}$$

wobei wir  $E(r) := |\vec{E}(r)|$  verwendet haben. Daraus können wir folgern

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

und wir wissen außerdem, dass die Feldrichtung parallel zu den Flächennormalenvektoren des Zylindermantels stehen müssen. Dies bedeutet jedoch

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

da  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  und  $\vec{n}(x, y, z) = r^{-1}(x, y, 0)^T$  gelten. Abschließend wollen wir erwähnen, dass dieses Resultat nur für sehr lange (näherungsweise unendlich lange) Drähte gilt. Dies ist einfach einzusehen, da unsere Symmetrieargumente an den Endpunkten des Drahtes offensichtlich zusammenbrechen und somit Randeffekte entstehen, welche das elektrische Feld in der Nähe der Randpunkte entscheidend beeinflussen. In der Mitte eines nicht allzukurzen Drahtes – weitab von den Endpunkten – ist Gleichung (5) jedoch eine gute Näherung für das tatsächliche Feld.

### 1.1.3 Das elektrische Feld einer homogen geladenen unendlich großen Fläche

In diesem letzten Beispiel wollen wir uns einer ebenen unendlich ausgedehnten geladenen Fläche widmen. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass diese Fläche der  $xy$ -Ebene entspricht und durch eine homogene Ladungsdichte  $\sigma$  (Ladung pro Quadratmeter:  $[\sigma] = C/m^2$ ) vollständig charakterisiert wird. Diese Geometrie hat eine vollständige Translationssymmetrie bezüglich der  $xy$ -Ebene: Das resultierende  $\vec{E}$ -Feld muss für jedes  $x$  und jedes  $y$  gleich sein und kann somit nur von  $z$  abhängen:

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(z).$$

Darüber hinaus verlangt Gleichung (2) zusammen mit Gleichung (3), dass das resultierende Feld parallel zur  $z$ -Achse sein muss. Somit gilt insbesondere

$$\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z) \quad \forall z > 0$$

und es ist von Vorteil, wenn wir für  $V$  ein beliebiges Volumen parallel zur  $z$ -Achse nehmen, welches von unserer geladenen Ebene in der Mitte zweigeteilt wird. Wir entscheiden uns für einen Zylinder mit Radius  $r$ , Höhe  $z$  und Mittelpunkt im

Koordinatenursprung. Dann gilt wegen Gleichung (3)

$$\begin{aligned}
\frac{r^2 \pi \sigma}{\epsilon_0} &= \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho(x, y, z) \, dx dy dz \\
&= \iint_{\partial V} \vec{E}(x, y, z) \, d\vec{A} = \iint_{\partial V} \vec{E}(x, y, z) \vec{n}(x, y, z) \, dA \\
&= \iint_{\text{Boden}} \vec{E}(x, y, z) \vec{n}(x, y, z) \, dA + \iint_{\text{Mantel}} \vec{E}(x, y, z) \vec{n}(x, y, z) \, dA + \iint_{\text{Deckel}} \vec{E}(x, y, z) \vec{n}(x, y, z) \, dA \\
&= 0 + E(z/2) \iint_{\text{Deckel}} dA - E(-z/2) \iint_{\text{Boden}} dA \\
&= E(z/2) r^2 \pi + E(z/2) r^2 \pi.
\end{aligned}$$

Dabei rührt das Minuszeichen vom Boden-Integral vom dazugehörigen Flächennormalenvektor  $(0, 0, -1)$  her. Wir bemerken, dass die Feldstärke somit auch von  $z$  unabhängig ist und erhalten mit  $\vec{E} \parallel \vec{e}_z$

$$\vec{E}(x, y, z) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2} \vec{e}_z & \text{für } z > 0, \\ -\frac{\sigma}{2} \vec{e}_z & \text{für } z < 0. \end{cases}$$

Dieses elektrische Feld ist stückweise konstant und (fast) völlig ortsunabhängig. Insbesondere bedeutet dies, dass das Feld überall im Raum gleich stark ist und somit selbst für sehr große Distanzen nicht verschwindet. Dass dieses Verhalten unphysikalisch ist, muss wohl nicht extra erwähnt werden. Nichtsdestotrotz lassen sich elektrische Felder von endlichen geladenen Ebenen fernab der Ränder sehr gut durch obige Formel beschreiben. Das gibt diesem unrealistischen Resultat eine nicht zu unterschätzende Relevanz, z.B. beim Berechnen des elektrischen Feldes von Plattenkondensatoren.

## 1.2 Das elektrische Potential

Wir wollen nun die mathematische Struktur der Gleichungen (2) und (3) etwas genauer unter die Lupe nehmen. Die erste Gleichung ist homogen und lässt sich als zusätzliche Bedingung an unsere Lösung sehen. Die zweite Gleichung ist inhomogen und berücksichtigt sämtliche Informationen über das tatsächliche System. Von einem mathematischen Blickwinkel aus, wäre es daher sehr vorteilhaft die erste Gleichung redundant zu machen und beide Gleichungen in einer einzigen zu absorbieren. Zu diesem Zweck rufen wir uns die Formel

$$\text{rot} \vec{\nabla} \phi(x, y, z) = 0 \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \tag{6}$$

in Erinnerung, welche für beliebige skalare Funktionen  $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  gilt. Somit erlaubt es uns die Einführung einer skalaren Funktion<sup>6</sup>  $\phi$  via

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi \tag{7}$$

<sup>6</sup>Das Minuszeichen in Definition (7) ist eine in der Physik übliche Konvention.

tatsächlich, die homogene Gleichung (2) redundant<sup>7</sup> zu machen – elektrische Felder der Form (7) erfüllen sie trivial wegen (6). Setzt man diesen Ansatz in Gleichung (3) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\epsilon_0}\rho &= \operatorname{div}\vec{E} = \operatorname{div}\left(-\vec{\nabla}\phi\right) \\ &= -\Delta\phi,\end{aligned}$$

wobei  $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  den Laplaceoperator bezeichnet. Mithilfe unseres Ansatzes haben wir somit die beiden Grundgleichungen auf eine einzige reduziert. Diese Gleichung ist in der klassischen Elektrostatik von so großer Bedeutung, dass sie einen eigenen Namen hat: Die Poisson-Gleichung. Für sie ist die allgemeine Lösung bekannt und man kann somit von einer beliebigen Ladungsverteilung  $\rho$  eindeutig auf das dazugehörige elektrische Potential  $\phi$  schließen!

**Nota bene:** Das elektrische Potential  $\phi$  ist mathematisch gesehen nichts als ein cleveres Hilfskonstrukt um die Maxwellgleichungen der Elektrostatik zu vereinen. Physikalisch kommt diesem Potential – oder besser der Potentialdifferenz  $U_{12} := \Delta\phi_{12} = \phi(\vec{x}_1) - \phi(\vec{x}_2)$  zwischen zwei Punkten  $\vec{x}_1$  und  $\vec{x}_2$  – eine sehr reale Bedeutung zu. Tatsächlich ist  $U_{12}$  ist nichts anderes als die Spannungsdifferenz zwischen den beiden Punkten. Ihre Einheit ist Volt ( $[U_{12}] = [\phi] = V$ ) und ihr kennt sie bereits gut aus der Mittelschule.

## 2 Magnetostatik

Die fundamentalen Bausteine der Magnetostatik sind elektrische Ströme  $I$  ( $[I] = A = C/s$ ), welche ein resultierendes Magnetfeld erzeugen. Derartige Ströme bestehen prinzipiell aus bewegten Ladungsträgern<sup>8</sup>, deshalb ist der Begriff Magnetostatik auf den ersten Blick irreführend. Statische Ladungsverteilungen sind gar nicht dazu in der Lage Magnetfelder hervorzurufen (es gibt keine bewegten Ladungen und somit auch keine elektrischen Ströme). Allerdings lassen sich durchaus statische Ströme definieren: Wir nennen einen Strom  $I$  statisch, falls seine Stromdichte  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  in jedem Punkt  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$  zeitlich konstant ist:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{j}(\vec{r}, t) = 0 \quad \forall \vec{r} \in \mathbb{R}^3, \forall t > 0.$$

Dabei ist die Stromdichte  $\vec{j}(x, y, z)$  ( $[[\vec{j}]] = A/m^2$ ) analog zur Ladungsdichte  $\rho(x, y, z)$  definiert:

$$I = \iint_A \vec{j} d\vec{A},$$

<sup>7</sup>A priori ist Ansatz (7) lediglich hinreichend. Tatsächlich ist er aber auch notwendig. Auf den Beweis dieser wichtigen Tatsache wollen wir hier jedoch nicht näher eingehen.

<sup>8</sup>Zur Erinnerung: Der elektrische Strom ist nichts anderes als ein Strom von Elektronen, welcher durch Kabel geführt wird.

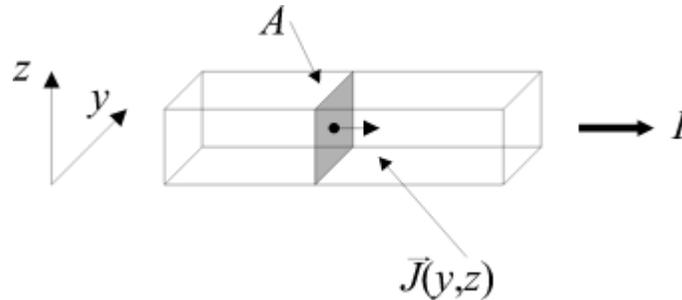


Figure 1: Schematischer Zusammenhang zwischen Stromdichte  $\vec{j}$  und Strom  $I$ .

allerdings ist sie vektoriell. Sie kodiert nämlich Stärke und Richtung des infinitesimalen Stromes. Die Fläche  $A$  im obigen Integral bezeichnet den Kabelquerschnitt, siehe Abbildung 1. Die Magnetostatik verfolgt somit folgendes Ziel:

**Ziel:** Gegeben eine beliebige statische Stromverteilung  $\vec{j}$ , berechne das resultierende (statische) Magnetfeld  $\vec{B}$ .

Das Vektorfeld  $\vec{B}$  ist das magnetische Analogon zum elektrischen Feld  $\vec{E}$ . Der Zusammenhang zwischen Kraft und  $\vec{B}$ -Feld ist jedoch komplizierter als der zwischen (Coulomb-) Kraft und  $\vec{E}$ -Feld. Er wird durch die Lorentzkraft hergestellt

$$\vec{F} = q (\vec{v} \times \vec{B}), \quad (8)$$

wobei  $q$  die Ladung eines Testteilchens bezeichnet und  $\vec{v}$  dessen Geschwindigkeit. Man beachte, dass diese Kraft nur auf bewegte Testladungen ( $\vec{v} \neq \vec{0}$ ) wirkt. Somit ist der Begriff Magnetostatik sogar auf doppelte Weise irreführend: man ermittelt die von bewegten Ladungen (Strömen) erzeugte Kraft auf bewegte Testladungen.

Ähnlich wie in der Elektrostatik gibt es auch in der Magnetostatik 2 Grundgleichungen:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (9)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \quad (10)$$

- Die erste Gleichung ist erneut homogen. Sie ist die mathematische Formulierung folgender Tatsache: Es gibt keine magnetischen Monopole. Somit können die magnetischen Feldlinien nicht bei positiven magnetischen Monopolen beginnen und bei Negativen enden (magnetische Elementarladungen scheint es nicht zu geben!) und müssen somit in sich geschlossen sein. Mathematisch gesehen ist (9) erneut eine wichtige Randbedingung, welche die Anzahl möglicher  $\vec{B}$ -Felder stark einschränkt.

- Die zweite Gleichung ist inhomogen und verknüpft das gesuchte  $\vec{B}$ -Feld mit der tatsächlichen statischen Ladungsverteilung  $\vec{j}$ . Dabei ist die magnetische Feldkonstante  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{N/A}^2$  erneut eine empirisch bestimmte Naturkonstante. Wie ihr elektrisches Analogon (3) ist Gleichung (10) extrem flexibel und vielseitig einsetzbar. Man kann sie zum Beispiel über eine beliebige kompakte 2-dimensionale Fläche  $A \subset \mathbb{R}^3$  mit Rand  $\partial A$  integrieren. Der Satz von Stokes impliziert dann:

$$\begin{aligned} \mu_0 I &= \iint_A \mu_0 \vec{j} d\vec{A} = \iint_A \text{rot} \vec{B} d\vec{A} \\ &= \int_{\partial A} \vec{B} d\vec{s}, \end{aligned}$$

wobei der letzte Ausdruck das Wegintegral von  $\vec{B}$  über die Kurve  $\partial A$  (der Rand einer 2D-Fläche kann als Kurve aufgefasst und parametrisiert werden) bezeichnet. Diese Form der Gleichung (10) ist mathematisch viel robuster als ihr differentielles Analogon. Außerdem kann die Fläche  $A$  beliebig gewählt und somit der Geometrie und Symmetrie konkreter Aufgabenstellungen angepasst werden.

Eine Alternative zu Gleichung (10), stellt das Biot-Savart-Gesetz dar. Dieses besagt, dass das Magnetfeld  $\vec{B}$  in einem beliebigen Punkt  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$  gegeben ist durch

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dx' dy' dz', \quad (11)$$

wobei  $\vec{r}' = (x', y', z')$  die dreidimensionale Integrationsvariable bezeichnet. Gleichung (11) ist besonders praktisch, falls man das Magnetfeld  $\vec{B}$  nicht global bestimmen will, sondern nur am Feld in einzelnen Punkten interessiert ist. Für einfache Stromgeometrien ermöglicht es oftmals auch beträchtliche Vereinfachungen, da das Kreuzprodukt in (11) oftmals verschwindet.

Allerdings ist das Biot-Savart-Gesetz kein unabhängiges Gesetz, sondern kann im Gegenteil aus (9) und (10) hergeleitet werden. Wir wollen darauf allerdings nicht weiter eingehen.

## 2.1 Paradebeispiele für magnetische Stromverteilungen

In diesem Abschnitt wollen wir den Umgang mit Gleichungen (9) und (10) anhand zweier einfacher und wichtiger Stromverteilungen üben.

### 2.1.1 Magnetfeld eines unendlich langen Drahtes

In diesem Beispiel betrachten wir erneut einen unendlich langen (unendlich dünnen) geraden Draht. Dieser soll von einem statischen homogenen Strom  $I$  durchflossen werden. Wir können unser Koordinatensystem so wählen, dass

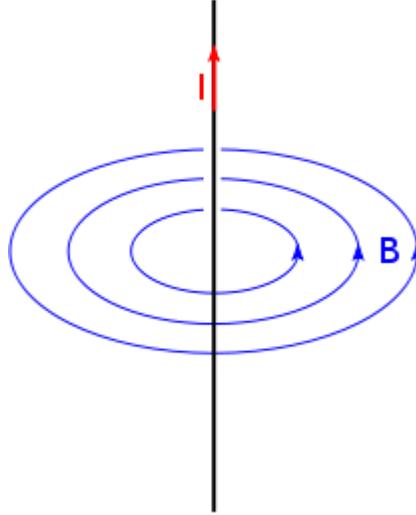


Figure 2: Schematische Darstellung der magnetischen Feldlinien des unendlich langen Drahtes. Symmetrie des Problems und Gleichung (9) verlangen, dass das  $\vec{B}$ -Feld entlang derartiger Kreise konstant und tangential liegt.

dieser Draht entlang der  $z$ -Achse verläuft und der Strom in positive  $z$ -Richtung fließt. Diese Geometrie ist vollständig zylindersymmetrisch und ähnlich wie in Beispiel 1.1.2 können wir daraus folgern, dass das resultierende Magnetfeld  $\vec{B}$  im Punkt  $(x, y, z)$  nur vom Normalabstand  $r_{\perp} = \sqrt{x^2 + y^2}$  des Punktes zum Draht abhängen kann und insbesondere unabhängig von  $z$  sein muss. Deshalb können wir uns getrost auf die  $xy$ -Ebene beschränken. Aufgrund der Zylindersymmetrie ist es zudem von Vorteil als Integrationsfläche  $A$  eine beliebige Kreisscheibe mit Radius  $r$  in der  $xy$ -Ebene um den Ursprung zu wählen. Dann gilt nämlich  $|\vec{B}(\vec{r})| = B(r) = \text{const} \forall \vec{r} \in \partial A$ . Gleichung (9) sagt uns zudem, dass  $\vec{B}$  quellenfrei sein muss. Das bedeutet insbesondere, dass  $\vec{B}$  in  $\partial A$  tangential auf die Kreiskurve stehen muss:

$$\vec{B} \parallel \dot{\vec{\gamma}}(t) = r \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

wobei  $\dot{\vec{\gamma}}(t)$  den Tangentialvektor an die Kreiskurve

$$\vec{\gamma}(t) = r \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

(mit  $|\vec{\gamma}(t)| = r$ ) zum Zeitpunkt  $t \in [0, 2\pi]$  bezeichnet. Somit erhalten wir mit der integralen Form von (10) über die Kreisscheibe  $A$

$$\begin{aligned} \mu_0 I &= \iint_A \mu_0 \vec{j} d\vec{A} = \int_{\partial A} \vec{B} d\vec{s} \\ &= \int_0^{2\pi} \vec{B}(\vec{\gamma}(t)) \dot{\vec{\gamma}}(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} |\vec{B}(r)| r dt = B(r) r \int_0^{2\pi} dt \\ &= B(r) 2\pi r, \end{aligned}$$

wo wir  $B(r) = |\vec{B}(r)|$  eingeführt haben. Die dritte Zeile folgt mit  $\vec{B} \parallel \dot{\vec{\gamma}}(t)$  und  $|\dot{\vec{\gamma}}(t)| = r$ . Damit kennen wir aber die Stärke

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

des  $\vec{B}$ -Feldes und dank (12) kennen wir zudem seine Richtung:

$$\begin{aligned} \vec{B}(x, y, z) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} \dot{\vec{\gamma}}(t) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi (x^2 + y^2)} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei wir  $x = r \cos(t)$  und  $y = r \sin(t)$  (Polarkoordinaten) verwendet haben.

### 2.1.2 Magnetfeld einer kreisrunden Leiterschleife

Hier wollen wir das Magnetfeld einer kreisrunden Leiterschleife mit Radius  $R$  im Kreismittelpunkt – und nur dort – bestimmen. Dabei nehmen wir an, dass der Strom gegen den Uhrzeigersinn fließe. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir unser Koordinatensystem so, dass dieser Kreis in der  $xy$ -Ebene mit Mittelpunkt im Ursprung liegt. Somit können wir den Draht durch folgende Kreiskurve

$$\vec{\gamma}(t) = R \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit  $t \in [0, 2\pi]$  parametrisieren. Für den Strom gilt dementsprechend  $\vec{j} = I \dot{\vec{\gamma}}(t)$ . Da wir zudem lediglich am Magnetfeld im Ursprung ( $\vec{r} = 0$ ) interessiert sind, ist es vorteilhaft das Biot-Savart-Gesetz zu verwenden. Für unsere Geometrie

gilt  $\vec{r} = 0$ , sowie  $\vec{r}' = \vec{\gamma}(t)$  und somit  $|\vec{r} - \vec{r}'| = |\vec{\gamma}(t)| = R$ . Diese Werte können wir in Gleichung (11) einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dx' dy' dz' \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \dot{\vec{\gamma}}(t) \times \frac{-\vec{\gamma}(t)}{R} dt \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin^2(t) + \cos^2(t) \end{pmatrix} dt \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \int_0^{2\pi} dt \\
&= \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{e}_z.
\end{aligned}$$

Hier haben wir verwendet, dass es nur entlang des Kreises mit Radius  $R$  eine nichtverschwindende Stromdichte gibt. Mit unserer Parametrisierung können wir das Volumenintegral  $\iiint_{\mathbb{R}^3} dx' dy' dz'$  durch das viel einfachere Integral  $\int_0^{2\pi} dt$  ersetzen.

Das Magnetfeld einer einfachen Kreisschleife ist praktisch von großer Bedeutung – sie ist das Paradebeispiel eines magnetischen Dipols.

## 2.2 Das magnetische Vektorpotential

Die beiden Gleichungen (9) und (10) erlauben uns prinzipiell Magnetfelder beliebiger statischer Ströme zu berechnen. Dabei kommt Gleichung (9) wieder die Bedeutung einer Randbedingung zu. Ähnlich wie beim elektrischen Potential, können wir sie aber auch durch einen cleveren Ansatz absorbieren. Ausgangspunkt für einen derartigen mathematischen Trick ist die Formel

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{A}(x, y, z)) = 0 \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

welche für beliebige Vektorfelder  $\vec{A}$  gilt. Somit ist es sinnvoll das Vektorpotential  $\vec{A}$  des Magnetfeldes  $\vec{B}$  über

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} \tag{13}$$

zu definieren. Ein derartiges Magnetfeld erfüllt Gleichung (9) per Konstruktion und für (10) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mu_0 \vec{j} &= \operatorname{rot}\vec{B} = \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{A}) \\
&= \vec{\nabla} \operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A},
\end{aligned}$$

wobei wir eine weitere bekannte Vektoridentität verwendet haben. Die Einführung eines Vektorpotentials  $\vec{A}$  hat es uns somit tatsächlich erlaubt beide Grundgleichungen der Magnetostatik auf eine Gleichung

$$\mu_0 \vec{j} = \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} \quad (14)$$

zurückzuführen. Tatsächlich ist der Ansatz (13) allgemein gültig (er ist nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig), was wir hier aber nicht zeigen wollen.

Genauso wie das elektrische Potential  $\phi$  ist das Vektorpotential  $\vec{A}$  also nichts anderes als ein netter mathematischer Trick. Im Gegensatz zum elektrischen Potential, welches eine wichtige physikalische Interpretation hat, ist das Vektorpotential  $\vec{A}$  auch einfach als solcher zu interpretieren. In der klassischen Physik hat das Vektorpotential tatsächlich keine direkte physikalische Bedeutung. Es gibt jedoch durchaus physikalische Phänomene – zum Beispiel der Aharonov-Bohm-Effekt – welche durch Magnetfelder allein nicht hinreichend erklärt werden können und wofür man das Vektorpotential  $\vec{A}$  braucht.

### 3 Elektrodynamik: Felder bewegter Ladungen und variabler Ströme

In den ersten beiden Kapitel haben wir uns der Elektrostatik und der Magnetostatik gewidmet. Diese beiden Disziplinen sind auf den ersten Blick völlig unabhängig voneinander. Dies ist aber nur deshalb so, weil wir uns auf statische Ladungsverteilungen (Elektrostatik) und zeitlich konstante Ströme (Magnetostatik) beschränkt haben.

Betrachtet man jedoch den allgemeineren und realistischeren Fall beweglicher Ladungsträger und variabler Ströme, sieht das allerdings ganz anders aus. Tatsächlich sind elektrische und magnetische Felder nichts anderes als 2 Seiten derselben Medaille und somit sehr stark verknüpft. Historisch gesehen geht dieser Erkenntnis auf führende Experimentalphysiker des frühen 19 Jahrhunderts

#### 3.1 Das Faradaysche Induktionsgesetz

Der wichtigste Zusammenhang zwischen elektrischen Strömen und Magnetfeldern wurde 1831 empirisch von Michael Faraday, Joseph Henry und Hans Christian Oersted (jeweils unabhängig voneinander) gefunden. Heute trägt es Faraday's Namen und besagt

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (15)$$

Diese differentielle Gleichung verknüpft die zeitliche Änderung eines Magnetfelds mit einem dadurch induzierten elektrischen Feld – daher der Name. Genau wie die Grundgleichungen der Elektro- und Magnetostatik ist dieses Gesetz extrem flexibel und universell anwendbar. Um das zu zeigen, wollen wir (15) über

eine beliebige kompakte 2D-Fläche  $A$  integrieren. Die Grundgleichungen der Vektoranalysis implizieren dann

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \Phi_{\vec{B}}(A) &= -\frac{\partial}{\partial t} \iint_A \vec{B} d\vec{A} = \iint_A \operatorname{rot} \vec{E} d\vec{A} \\ &= \int_{\partial A} \vec{E} d\vec{s}, \end{aligned}$$

wobei der letzte Ausdruck ein Wegintegral entlang des Randes  $\partial A$  der Fläche  $A$  bezeichnet. Für den konkreten Fall einer Fläche, dessen Rand durch einen leitenden Draht beschrieben wird, ergibt sich folgende physikalische Interpretation dieses Linienintegrals. Wenn wir uns an Formel (7) erinnern ( $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ ), dann können wir diesen Ausdruck mit einer induzierten Spannung identifizieren. In der Tat gilt für zwei beliebige auf der Leiterschleife  $\partial A$  sitzende benachbarte Punkte  $\vec{x}_1$  und  $\vec{x}_2$

$$U_{\text{ind}} = \phi(\vec{x}_1) - \phi(\vec{x}_2) = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \vec{E} d\vec{s} = \int_{\partial A} \vec{E} d\vec{s}$$

wobei wir hier die Unabhängigkeit eines Wegintegrals über  $\vec{E}$  vom expliziten Weg (das elektrische Feld ist konservativ) verwendet haben. Damit erhalten wir die bekannte und intuitiv zugängliche Formel

$$U_{\text{ind}} = -\frac{\partial}{\partial t} \Phi_{\vec{B}}(A) = -\frac{d}{dt} \Phi_{\vec{B}}(A), \quad (16)$$

welche für beliebige (geschlossene) Leiterschleifen mit umschlossener Fläche  $A$  gilt. Dabei haben wir verwendet, dass der Fluss  $\Phi_{\vec{B}}(A)$  nur von  $t$  abhängt und somit partielle und gewöhnliche Ableitungen übereinstimmen. In Worten: Ändert sich der magnetische Fluss durch eine Leiterschleife, so wird in dieser eine Spannung induziert. Die Stärke dieser Spannung ist proportional zur Flussänderung und durch (16) gegeben.

Dieser Zusammenhang bildet die Grundlage für Stromgeneratoren und Elektromotoren zugleich. Es muss daher wohl nicht weiter erwähnt werden, wie wichtig diese Erkenntnis für unsere moderne digitale Welt ist.

### 3.1.1 Beispiel: Generator/Elektromotor

In diesem Beispiel wollen wir einen einfachen Generator untersuchen, Abbildung 3. Dieser bestehe aus einem homogenen Magnetfeld der Stärke  $B_0$  in  $x$ -Richtung. In diesem Feld befindet sich eine entlang der  $y$ -Achse drehbare Leiterspule mit Fläche  $A$ , an deren Ende sich Kontakte befinden um etwaige induzierte Spannung  $U_{\text{ind}}$  abzugreifen. Dreht sich diese Leiterschleife nun aufgrund einer externen mechanischen Kraft, dann verändert sich der magnetische

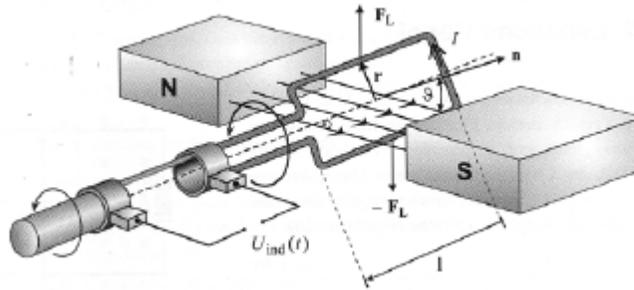


Figure 3: Schematischer Aufbau eines Generators.

Fluss durch  $A$  periodisch. Konkret gilt für eine Drehbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ :

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\vec{B}}(A)(t) &= \iint_A \vec{B} d\vec{A} = \iint_A \vec{B} \vec{n} dA \\
 &= \iint_A B_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ 0 \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} dx dz \\
 &= B_0 \cos(\omega t) \iint_A dA \\
 &= AB_0 \cos(\omega t).
 \end{aligned}$$

Hier haben wir benützt, dass der Normalenvektor einer Drehbewegung um die  $z$ -Achse o.B.d.A. durch  $\vec{n}(t) = (\cos(\omega t), 0, \sin(\omega t))^T$  gegeben ist. Somit erhalten wir einen periodischen Fluss durch die Leiterschleife, welcher aufgrund des Induktionsgesetzes eine Spannung

$$\begin{aligned}
 U_{\text{ind}} &= -\frac{\partial}{\partial t} \Phi_{\vec{B}}(A) = -\dot{\Phi}_{\vec{B}}(t) \\
 &= -\omega AB_0 \sin(\omega t).
 \end{aligned}$$

Offenbar produziert unser Generator Wechselspannung mit Amplitude  $\omega AB_0$  und Frequenz  $\omega$ . Das ist allerdings erst der Anfang.

Unser Generator erzeugt Spannung (potentielle Energie) und wenn wir diese nützen wollen, müssen wir die beiden Ausgänge mit einem beliebigen Stromkreis schließen. In diesem kann  $U_{\text{ind}}$  dann für unsere Zwecke konsumiert werden. Das Prinzip der Energieerhaltung verlangt aber, dass diese Energie zunächst aufgewendet werden muss – und zwar von mechanischer Arbeit, welche aufgewendet werden muss um die konstante Drehbewegung aufrechtzuerhalten.

Mithilfe der Lenz'schen Regel lässt sich dieses Phänomen folgendermaßen erklären: Wird der Stromkreis in der Leiterschleife geschlossen, beginnt ein

Strom proportional zu  $U_{\text{ind}}$  zu fließen. Dieser erzeugt seinerseits ein Magnetfeld, welches dem externen Magnetfeld entgegengerichtet ist. Diese beiden Felder stoßen sich gegenseitig ab und führen so zu einer der Drehbewegung entgegengesetzten Kraft (Alternativ kann diese entgegenwirkende Kraft über auf den Stromfluss wirkende Lorentzkraft hergeleitet werden). Um die konstante Drehbewegung aufrechtzuerhalten muss daher mechanische Arbeit zugeführt werden um diese Gegenkraft zu kompensieren – das ist das Generatorprinzip: Mechanische Arbeit (Leistung) wird in elektrische Energie (Leistung) umgewandelt.

Nun können wir aber den Apparat umdrehen. Anstatt mechanische Arbeit zuzuführen, können wir auch eine Wechselspannung  $U$  an die Leiterschleife anlegen. Dieser erzeugt – wie zuvor – eine der vorigen Drehbewegung entgegengesetzte Kraft. Da diese anfängliche Drehbewegung jetzt jedoch fehlt, führt diese Kraft dazu, dass sich die Leiterschleife (in die zu oben entgegengesetzte Richtung) dreht – das ist das Elektromotorprinzip: Elektrische Energie (Leistung) wird in mechanische Arbeit (Leistung) umgewandelt.

**Fazit:** Generatoren und Elektromotoren sind vom Aufbau her identisch.

### 3.1.2 Beispiel: Selbstinduktion in einem Koaxialkabel

In dieser Aufgabe widmen wir uns einem weiteren interessanten Phänomen – der Selbstinduktion. Wird ein Stromkreis von einem zeitlich variierenden Strom  $I(t)$  durchflossen, so entsteht ein zeitabhängiges Magnetfeld  $\vec{B}(I(t))$  welches wiederum zu einem zeitabhängigen Magnetfluss durch die vom Stromkreis aufgespannte Fläche führen kann. Das Faraday'sche Induktionsgesetz besagt dann, dass dies zu einer zusätzlichen induzierten Spannung im Stromkreis führt. Es findet also eine interessante Rückkopplung statt. Diese Rückkoppelung wollen wir anhand eines Koaxialkabels besser verstehen.

Ein derartiges Kabel habe die Länge  $l$  und bestehe aus zwei zylinderförmigen Hohlleitern mit Radien  $r_1$  und  $r_2$ , welche ineinander verschachtelt sind ( $r_1 < r_2$ ). Diese beiden Hohlleitern seien am oberen und unteren Ende durch einen Draht verbunden. Somit entsteht ein geschlossener Stromkreis durch den wir nun einen zeitabhängigen Strom  $I(t)$  schicken. Diesen Stromkreis können wir als flach und rechteckig annehmen. Seine Seiten bestehen aus den beiden Drähten der Länge  $r_2 - r_1$  und jeweils einem (Linien-) Teilstück des äußeren und inneren Hohlleiters mit Länge  $l$ . Diese Leiterschleife ist von großer Bedeutung. Tatsächlich ist es wohlbekannt, dass fließender Strom im Inneren des Koaxialkabels (zwischen den Hohlzylindern) ein magnetisches Feld

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi(x^2 + y^2)} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt (vgl. dazu Beispiel 2.1.1). Dabei haben wir angenommen, dass das Koaxialkabel entlang der  $z$ -Achse verläuft. Außerdem wurden die Randeffekte am Ende des Koaxialkabels vernachlässigt. Aufgrund der Rotationssymmetrie

des Problems können wir uns auf die  $xz$ -Ebene beschränken (d.h.  $y = 0$ ), wo gilt

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Unsere Leiterschleife liegt dann ebenfalls in der  $xy$ -Ebene und hat somit den konstanten Flächennormalenvektor  $\vec{n} = (0, 1, 0)^T$ . Insbesondere gilt daher  $\vec{B} \parallel \vec{n}$  und wir können den magnetischen Fluss durch die von der Leiterschleife aufgespannte Fläche  $A$  leicht berechnen:

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{B}}(A) &= \iint_A \vec{B} d\vec{A} = \int_0^l dl \int_{r_1}^{r_2} dx \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi x} \\ &= \frac{\mu_0 I(t) l}{2\pi} \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right). \end{aligned}$$

Mithilfe des makroskopischen Faradayschen Induktionsgesetzes folgern wir nun

$$\begin{aligned} U_{\text{ind}} &= -\frac{\partial}{\partial t} \Phi_{\vec{B}(t)}(A) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu_0 I(t) l}{2\pi} \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \\ &= -\frac{\mu_0 l}{2\pi} \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \frac{\partial I(t)}{\partial t} \\ &= -\frac{\mu_0 l}{2\pi} \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \dot{I}(t). \end{aligned}$$

Für zeitlich variable Ströme  $I(t)$  findet also tatsächlich Selbstinduktion statt. Diese ist proportional zur Veränderung des Flusses und diesem entgegengerichtet. Dadurch wird die ursprüngliche Änderungsrate des Stromflusses gebremst (Dämpfung).

### 3.2 Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom

In diesem Kapitel wollen wir uns dem zweiten (und letzten) wichtigen Meilenstein der Elektrodynamik widmen. Im Gegensatz zum Faraday'schen Induktionsgesetz und den Gesetzen der Elektro- und Magnetostatik, wurde dieser nicht durch experimentelle Studien (Empirismus) gefunden, sondern durch theoretische Deduktion. Es war James Clerk Maxwell, welcher erkannte, dass das Ampere'sche Gesetz der Magnetostatik (10) nicht stimmen kann. Er postulierte, dass nicht nur Ströme, sondern auch zeitlich variable elektrische Felder ein resultierendes Magnetfeld hervorrufen können. Konkret korrigierte er (10) zu

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (17)$$

Der zweite Ausdruck ist als Maxwell'scher Verschiebungsstrom bekannt. Obwohl es sich dabei um keinen Strom im eigentlichen Sinn handelt, verhält er sich völlig analog.

### 3.3 Die Maxwell-Gleichungen

Nun sind wir in der Lage die 4 Grundgleichungen der Elektrodynamik kompakt zu formulieren:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} && \text{(Gauss'sches Gesetz),} \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} && \text{(Ampere'sches Gesetz),} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 && \text{(keine magn. Monopole),} \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} && \text{(Faraday'sche Induktion).} \end{aligned}$$

Diese 4 Gleichungen – und ihre Verallgemeinerungen für Elektrodynamik in Materie – sind die Grundpfeiler der Elektrodynamik – dem vielleicht vollständigsten und bestverstandenen Theoriegebilde der Physik. Außerdem fußen die wichtigsten Errungenschaften des 20. Jahrhunderts – die Relativitätstheorie und die Quantenmechanik – in dieser Wissenschaft. Erstere entstand aus der kuriosen Tatsache, dass die 4 obigen Gleichungen eine konstante Lichtgeschwindigkeit implizieren. Dies ist jedoch mit der Galileisymmetrie der klassischen Mechanik nicht vereinbar, wo Geschwindigkeiten stets additiv sind und somit beliebig groß werden können. Anstatt wie fast alle seiner Zeitgenossen diese Anomalie auf ein dubioses ruhendes Lichtmedium – den Äther – zu schieben, drehte Einstein den Spieß um und verwendete die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit als ein Grundpostulat für seine spezielle Relativitätstheorie.

Die Quantenmechanik wurde von Max Planck begründet, der versuchte die Ultraviolett-Katastrophe im Emissionsspektrum schwarzer Strahler zu lösen. Dabei erkannte er, dass Energie nicht kontinuierlich ist, sondern in kleinen diskreten Paketen (von der Größe des Planck'schen Wirkungsquantums  $h$ ) kommt. Diese "Quantisierung von Energie" führte im weiteren Verlauf zur Theorie der Quanten (Quantenmechanik).

#### 3.3.1 Die Kontinuitätsgleichung

Zum Abschluss wollen wir die Maxwell-Gleichungen dazu verwenden eine weitere grundlegende Gleichung herzuleiten – die Kontinuitätsgleichung. Diese besagt

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{18}$$

und entspricht salopp gesprochen folgender Regel gesunden Menschenverstands: Wenn die Ladungsdichte in einem Volumen zunimmt, dann muss diese zusätzliche Ladung durch Ströme in selbiges Volumen getragen werden.

Interessanterweise ist dieses grundlogische Gesetz weniger fundamental als die Maxwell-Gleichungen und folgt sogar aus ihnen. Um das zu zeigen, starten wir zunächst mit dem Ampere'schen Gesetz und nehmen die Divergenz davon:

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{B}) = \mu_0 \operatorname{div}\vec{j} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 \operatorname{div}\vec{E} \\ &= \mu_0 \operatorname{div}\vec{j} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ &= \mu_0 \left( \operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

wobei wir das Gauss'sche Gesetz und die Tatsache, dass  $\operatorname{div}$  und  $\frac{\partial}{\partial t}$  vertauscht werden können, verwendet haben. Division durch  $\mu_0$  liefert nun das gewünschte Resultat.

Allerdings müssen wir gestehen, dass wir hier gewissermaßen Geschichtsrevision betrieben haben. Tatsächlich war es nämlich die Kontinuitätsgleichung, welche James Clerk Maxwell überhaupt erst auf seinen Verschiebungsstrom gebracht hat.